Números que se escriben como fracción

- Los **números racionales** (que se representan con $\mathbb{Q}$) son los que pueden expresarse como una razón (división) entre dos números enteros, es decir, como una **fracción**.
  Por ejemplo, 2, que es natural y entero, también es un número racional, ya que puede expresarse como $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, etc. Lo mismo ocurre con cualquier otro natural ($\mathbb{N}$) o entero ($\mathbb{Z}$).

- Los racionales pueden expresarse, indistintamente, como fracción o a partir de su **expresión decimal**.
  Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ puede expresarse como decimal efectuando el cociente entre 1 y 2. Es decir, $\frac{1}{2} = 0,5$.
  Estas expresiones decimales pueden ser **exactas** (con una cantidad finita de cifras decimales, por ejemplo 1,85) o **periódicas** (cuando una o más cifras decimales se repiten indefinidamente).
  A su vez, las expresiones decimales periódicas pueden ser **periódicas puras** (todas sus cifras decimales se repiten, por ejemplo $1,\overset{\frown}{35} = 1,35353535...$) o **periódicas mixtas** (algunas cifras decimales se repiten y otras, no. Por ejemplo $1,3\overset{\frown}{12} = 1,3121212...$).

- Entre dos números racionales siempre hay otro número racional. Por ejemplo, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, está $\frac{5}{12}$. Este es el número que está justo en la mitad, pero hay otros. Y entre $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{2}$ está $\frac{11}{24}$, entre otros. De esta manera se podría encontrar siempre un número racional entre otros dos. Por este motivo, se dice que los números racionales forman un **conjunto denso**.

14. Escribí la expresión decimal de cada una de estas fracciones.

a. $\frac{3}{2} =$ c. $-\frac{2}{5} =$ e. $\frac{4}{9} =$ g. $\frac{4}{7} =$

b. $-\frac{3}{4} =$ d. $\frac{1}{3} =$ f. $-\frac{101}{90} =$ h. $\frac{5}{6} =$

15. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los denominadores de las fracciones de la actividad anterior y las expresiones decimales que obtuviste. Ahora, sin pasar a decimal, completá la tabla indicando "sí" donde corresponda. ¡Atención! Asegurate de simplificar las fracciones todo lo que puedas antes de empezar.

Fracción	Exp. decimal exacta	Exp. decimal periódica
$\frac{16}{25}$		
$-\frac{35}{9}$		
$\frac{47}{20}$		
$-\frac{495}{990}$		
$\frac{600}{900}$		
$-\frac{495}{999}$		

Pasaje de decimal a fracción

Buscando la fracción

- Si un número racional tiene una **expresión decimal finita**, puede pasarse a fracción colocando el número (sin la coma) en el numerador, y en el denominador una potencia de 10 con exponente igual a la cantidad de cifras decimales.

$1,3 = \frac{13}{10}$ $\qquad$ $2,571 = \frac{2.571}{1.000}$

- Si el número racional es una **expresión periódica pura**, en el numerador se coloca el número (sin la coma) y se le resta el número formado por las cifras que no están afectadas por el período. En el denominador se colocan tantos nueves como cifras periódicas haya.

$2,\overset{\frown}{5} = \frac{25-2}{9} = \frac{23}{9}$ $\qquad$ $21,\overset{\frown}{37} = \frac{2.137-21}{99} = \frac{2.116}{99}$

- Si el número racional es una **expresión periódica mixta**, en el numerador se coloca el número (sin la coma) y se le resta el número formado por las cifras que no están afectadas por el período. En el denominador se colocan tantos nueves como cifras periódicas haya y tantos ceros como cifras no periódicas decimales existan.

$1,8\overset{\frown}{5} = \frac{185-18}{90} = \frac{167}{90}$ $\qquad$ $3,2\overset{\frown}{34} = \frac{3.234-32}{990} = \frac{3.202}{990} = \frac{1.601}{495}$

16. Pasá estas expresiones decimales a fracción. Después simplificalas hasta obtener una fracción irreducible, es decir, hasta que ya no puedan seguir simplificándose.

a. 0,6 =

b. 1,8 =

c. 2,3 =

d. 5,25 =

e. 18,64 =

f. –135,75 =

17. Pasá a fracción las siguientes expresiones decimales periódicas. Verificá con la calculadora. Después simplificalas hasta hacerlas irreducibles.

a. $0,\overset{\frown}{7} =$

b. $3,\overset{\frown}{6} =$

c. $-2,\overset{\frown}{54} =$

d. $-1,1\overset{\frown}{7} =$

e. $24,15\overset{\frown}{7} =$

f. $35,0\overset{\frown}{25} =$

g. $-21,16\overset{\frown}{45} =$

h. $34,00\overset{\frown}{7} =$

Fijate bien

A las expresiones decimales periódicas se las menciona simplemente como "números periódicos".

18. Completá los numeradores o denominadores faltantes para que se verifique cada igualdad.

a. $0{,}4 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{35} = -\frac{\dots\dots}{105} = \frac{56}{\dots\dots} = -\frac{\dots\dots}{1.400}$

b. $1{,}8 = \frac{\dots\dots}{5} = \frac{\dots\dots}{55} = \frac{18}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{350}$

c. $0{,}5\widehat{3} = \frac{24}{\dots\dots} = \frac{96}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{15} = \frac{16}{\dots\dots}$

d. $-0{,}0\widehat{5} = -\frac{35}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{90} = -\frac{700}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{450}$

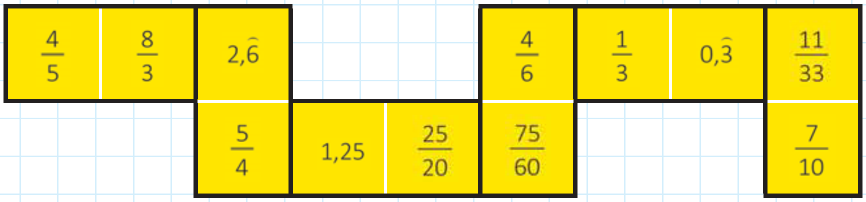
Fijate bien

Recordá que dos fracciones son equivalentes cuando, al dividir el numerador por el denominador, se obtiene la misma expresión decimal.

19. **Estrategia: expresar todos los números de la misma forma** Ordená estos números de menor a mayor.

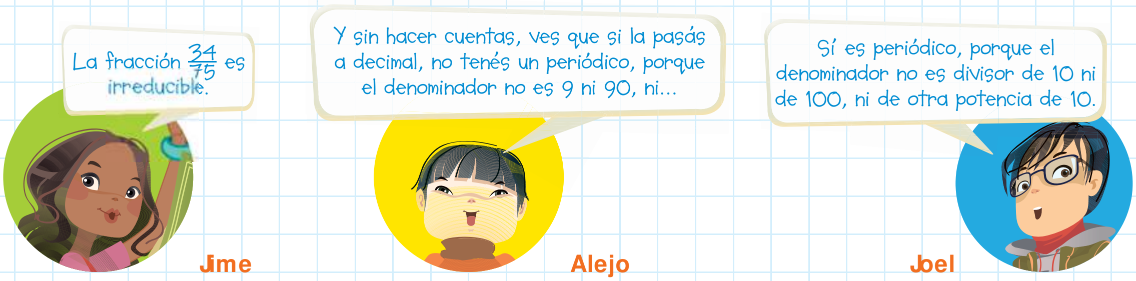
$4{,}5$ $\frac{5}{3}$ $0{,}00\widehat{7}$ $-\frac{4}{3}$ $-1{,}3$ $-\frac{85}{99}$ $\frac{7}{99}$ 0

20. En este dominó racional hay un error. ¿Cuál? Acordate de que para colocar una ficha al lado de la otra, los valores que se juntan deben coincidir.



21. Volvé a mirar el dominó de la actividad anterior. ¿Cuál pudo haber sido la primera ficha jugada, si tiene los dos valores iguales? ¿Hay una sola posibilidad?

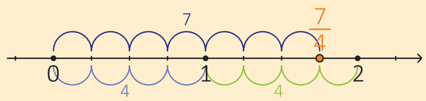
22. **Hacé de profe** Sin pasar la fracción a decimal, señalá quién o quiénes tienen razón.



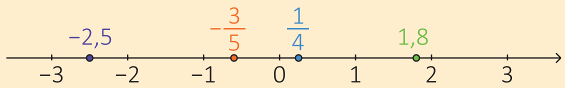
Racionales en la recta numérica

Representación en la recta

- Para representar un número racional en la recta numérica, se puede trabajar con su expresión fraccionaria. Para eso se divide cada unidad –es decir, la distancia entre dos números enteros consecutivos– en la cantidad de veces que indica el denominador de la fracción y se cuentan a partir de cero tantas partes como lo indique el numerador.
  Por ejemplo, para representar $\frac{7}{4}$ se divide cada unidad en 4 partes iguales y se ubica el número en la séptima de esas partes, contada desde cero.



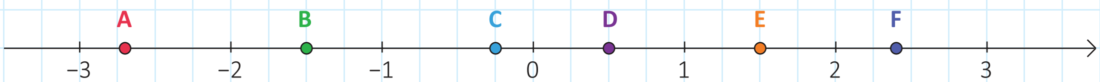
La representación de los números en la recta numérica permite ordenarlos “a simple vista” considerando que, entre dos números, el mayor de ellos es el que se encuentra ubicado a la derecha.



En la representación anterior se ve que –2,5 es el menor de los números representados, y 1,8 es el mayor.

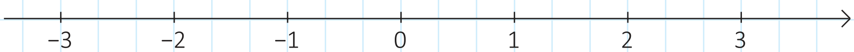
23. Completá la tabla señalando qué letra corresponde a cada número, según su ubicación en la recta numérica.

Número	$\frac{1}{2}$	–0,25	$\frac{12}{5}$	–1,5	$\frac{3}{2}$	–2,7
Letra						



24. Representá los siguientes números racionales en la recta numérica.

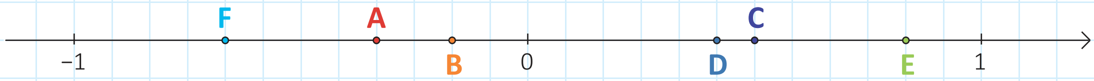
$\frac{4}{3}$ $-\frac{15}{6}$ $0,\overset{\frown}{3}$ –0,5 $-\frac{5}{2}$ $-1,\overset{\frown}{6}$ 3,5



Fijate bien

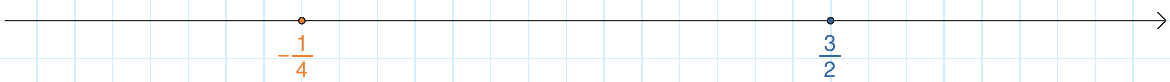
Para representar todas las fracciones en la misma recta, te puede resultar más fácil si encontrás fracciones equivalentes a las que tenés que representar, todas con el mismo denominador.

25. Escribí las fracciones irreducibles que representan cada una de las letras marcadas en la recta numérica.



A → B → C → D → E→ F →

26. Ubicá en la recta numérica los números enteros entre los que se encuentran estas fracciones.



27. Ordená los números que se indican en cada caso y después encontrá otros dos que estén entre ambos.

a. $0,\hat{4}$ y 0,4

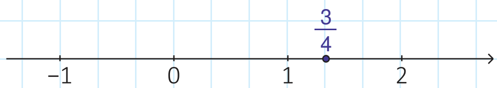
c. $1,0\hat{2}$ y $1,\widehat{02}$

b. $0,\hat{4}$ y $0,\hat{5}$

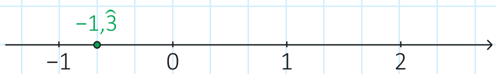
d. −1,10 y $-1,\widehat{10}$

28. **Hacé de profe** Milena representó algunos números, pero casi todos le salieron mal. ¿Cuál es el correcto? ¿Cuál fue su error en cada uno de los otros? ¿Cuál es el número que corresponde a cada uno de los puntos que marcó Milena?

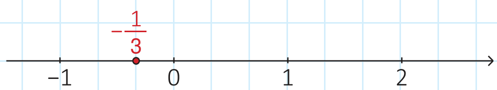
a.



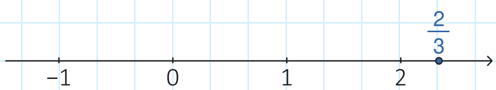
c.



b.



d.



29. Escribí todos los divisores enteros de cada uno de estos números. ¿Alguno es primo?

a. 45 **b.** 102 **c.** 31 **d.** 100

30. Determiná cuáles de estos números son primos.

a. 171 **b.** 702 **c.** 123 **d.** 103

31. Indicá cuáles de los siguientes números son múltiplos de ocho.

a. 4.500 **c.** 31.250

b. 4.200 **d.** 17.496

32. Hallá el m.c.m. y el m.c.d. de estos números.

Números	m.c.m.	m.c.d.
250; 100		
350; 105		
75; 600; 60		
140; 64; 500		
700; 380; 1.250		

33. Planteá y resolvé las siguientes situaciones.

a. Tres amigos viajan a Córdoba para trabajar. Uno de ellos viaja cada 15 días, el segundo cada 12 y el restante cada 35 días. ¿Cuántas veces al año viajan juntos?

b. Una chapa de 120 cm de largo por 252 cm de ancho, se quiere dividir en cuadrados iguales, sin que sobre nada. ¿Cuál es la mayor medida que puede tener el lado de cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados pueden obtenerse?

c. Octavio tiene cuatro tanques llenos de aceite de 72 litros, 24 litros, 56 litros y 120 litros, cada uno. Con ese aceite quiere llenar bidones, todos de la misma capacidad, sin mezclar los aceites. Si tiene bidones de 4 litros, 6 litros, 8 litros y 12 litros, ¿cuál le conviene utilizar para cargar la menor cantidad de bidones y que todos queden llenos? ¿Cuántos bidones de cada aceite tendrá?

34. Clasificá las siguientes fracciones en expresiones decimales exactas (**DE**), expresiones decimales periódicas puras (**PP**) o expresiones decimales periódicas mixtas (**PM**), según corresponda.

a. $\frac{54}{9} \rightarrow$ **d.** $\frac{99}{9900} \rightarrow$

b. $\frac{60}{90} \rightarrow$ **e.** $\frac{481}{198} \rightarrow$

c. $\frac{35}{900} \rightarrow$ **f.** $\frac{925}{3663} \rightarrow$

35. Encontrá la fracción irreducible equivalente a cada una de estas expresiones decimales.

a. $0{,}58 =$ **f.** $0{,}3\overset{\frown}{2} =$

b. $1{,}02 =$ **g.** $1{,}3\overset{\frown}{2} =$

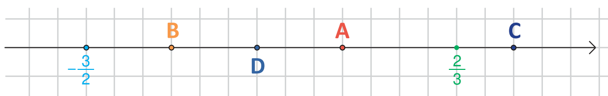
c. $-2{,}001 =$ **h.** $1{,}0\overset{\frown}{32} =$

d. $-2{,}\overset{\frown}{25} =$ **i.** $1{,}00\overset{\frown}{32} =$

e. $0{,}\overset{\frown}{32} =$ **j.** $0{,}\overset{\frown}{9} =$

36. Mirá el último número periódico de la actividad anterior. ¿Qué otra expresión decimal creés que puede representar al número $2{,}\overset{\frown}{9}$? ¿Y al $2{,}1\overset{\frown}{9}$? Verificá tu suposición pasándolos a fracción.

37. ¿Cuáles son los números representados?



38. Obtené tres fracciones que estén entre los números que se indican en cada caso.

a. $\frac{41}{98}$ y 0,5 **b.** 0,1 y $0{,}\overset{\frown}{1}$

39. Ordená de mayor a menor estos números.

$-0{,}\overset{\frown}{5}$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad \frac{226}{90}$ $\quad -0{,}\overset{\frown}{1}$ $\quad 0$ $\quad -1{,}3\overset{\frown}{2}$

Las cuatro operaciones básicas con fracciones

- Para sumar y restar fracciones, se puede trabajar con fracciones equivalentes de igual denominador:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=\frac{18}{12}+\frac{4}{12}-\frac{5}{12}=\frac{18+4-5}{12}=\frac{17}{12}$$ → Conviene usar como denominador común el m.c.m. de los denominadores.

- Para multiplicar fracciones, se multiplican por un lado los numeradores y por otro, los denominadores:

$$-\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\cdot\frac{7}{\underset{3}{\cancel{6}}}=-\frac{2\cdot 7}{3\cdot 3}=-\frac{14}{9}$$ → Es conveniente simplificar cualquier numerador con cualquier denominador antes de multiplicar.

- Y para dividirlas, se multiplica la primera por la inversa de la segunda (es decir, se invierte la segunda fracción y se multiplica):

$$\frac{5}{2}:\frac{4}{7}=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{35}{8}$$

Operaciones combinadas

- Si hay operaciones combinadas entre expresiones fraccionarias y expresiones decimales, resulta conveniente pasar las expresiones decimales a fracciones antes de resolver el cálculo.
  Además, debe respetarse el **orden** de las operaciones: primero las multiplicaciones y divisiones, luego las sumas y las restas, a menos que los paréntesis indiquen lo contrario.

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{4-5}{6}=-\frac{1}{6}$$

Aunque en el cálculo aparezca primero la resta, debe realizarse la multiplicación antes de restar.

40. Indicá la respuesta correcta de cada uno de estos cálculos.

a. $-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}$

I. $-\frac{23}{2}$ II. $\frac{7}{12}$ III. $-\frac{7}{12}$

b. $-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$

I. $\frac{23}{24}$ II. $-\frac{23}{12}$ III. $\frac{23}{12}$

c. $-2+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$

I. $-\frac{21}{20}$ II. $-\frac{1}{2}$ III. $\frac{21}{20}$

d. $0,\widehat{3}+\frac{1}{4}-1,\widehat{7}$

I. $\frac{85}{36}$ II. $-\frac{85}{36}$ III. $-\frac{43}{36}$

e. $-3,\widehat{2}+2,7\widehat{4}-\frac{1}{2}$

I. $-\frac{97}{15}$ II. $\frac{44}{45}$ III. $-\frac{44}{45}$

f. $6,3\widehat{2}+1,8-2,\widehat{9}$

I. $-\frac{461}{90}$ II. $\frac{461}{90}$ III. $\frac{2.251}{495}$

41. ¿Cuál es la respuesta correcta?

a. $-\frac{96}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$

I. $\frac{4}{7}$ II. $\frac{28}{25}$ III. $-\frac{4}{7}$

b. $\frac{36}{49}:\left(-\frac{18}{7}\right)$

I. $\frac{2}{7}$ II. $\frac{648}{343}$ III. $-\frac{2}{7}$

c. $-2,\hat{4}:\left(-0,0\hat{8}\right)$

I. $\frac{55}{2}$ II. $\frac{22}{5}$ III. $\frac{16}{75}$

d. $0,75\cdot\left(-0,\widehat{36}\right)\cdot\left(-3,8\right)$

I. $\frac{209}{55}$ II. $\frac{57}{55}$ III. $-\frac{15}{209}$

e. $-\frac{27}{8}\cdot\left(-0,0\hat{4}\right):\left(-1,25\right)$

I. $\frac{3}{25}$ II. $-\frac{3}{25}$ III. $-\frac{6}{55}$

f. $\frac{85}{27}:0,\widehat{96}:\left(-0,\hat{5}\right)$

I. $-\frac{187}{32}$ II. $\frac{544}{99}$ III. $-\frac{544}{99}$

42. ¿Cuántos años tiene cada uno?

El cociente entre la edad de mi mamá y la de su hermana Sol es igual a la diferencia entre doce quintos y tres cuartos. Si mamá tiene 33 años, ¿cuántos tiene Sol?



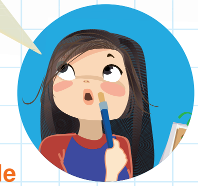
Claudio

Ja, ja, ja. Ya empezaste con tus adivinanzas. A ver si averiguás cuántos tiene Juani, mi primo, si el cociente entre mi edad y la suya es igual al triple de cinco cuartos, menos un medio. Ya sabés que yo tengo 13.



Aldana

Así que quieren adivinanzas numéricas. ¿Qué tal esta? Si al producto entre diecinueve séptimos y siete cuartos le resto tres, obtengo el cociente entre las edades de mis dos hermanos. ¡Ah! El menor tiene la misma edad que Juani. ¿Cuántos años tiene el otro?



Sole

43. Hacé de profe Cris resolvió la siguiente suma y simplificó hasta llegar al resultado. ¿Es correcto lo que hizo? ¿Por qué? Si no es correcto, resolvelo bien.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{9+4}{12}=\frac{3+4}{4}=\frac{3+4}{4}=\frac{3+1}{1}=\frac{4}{1}=4$$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

44. Resolvé.

a. $\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} - \frac{7}{10} : \frac{7}{20} =$

b. $\frac{36}{25} : \frac{6}{5} - 8 \cdot \frac{3}{4} =$

Fijate bien

Para no olvidarse de respetar el orden de las operaciones, hay que separar en términos, es decir, lo que está entre los signos + y –.

$\underbrace{\frac{1}{2} \ominus \frac{8}{3} : \frac{4}{3}}$

Dos términos.

45. **Hacé de profe** Indicá si los resultados de los cálculos son correctos. En caso de no serlo, resolvelos bien.

a. $\frac{7}{4}\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{8} : \frac{9}{4} = -\frac{13}{15}$

b. $-0,\widehat{2} - 0,\widehat{8} : \frac{4}{9} + 0,3 = -\frac{22}{10}$

c. $-0,\widehat{2} + 8,3 : 1,8\widehat{4} = 0$

d. $-\frac{14}{9} : 0,\widehat{6} + 0,\widehat{8} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{3}$

46. Martina faltó a la escuela, pero copió los cálculos que hicieron en clase con sus resultados para hacerlos y ver si le salen bien. Sin embargo, en algunos casos se olvidó de colocar los paréntesis. ¿En cuáles? Cuando hagan falta, poné los paréntesis donde correspondan para que los cálculos coincidan con los resultados que anotó.

a. $\frac{3}{4} \cdot 0,\widehat{2} + 1 = \frac{11}{12}$

b. $0,\widehat{7} \cdot \frac{3}{4} : \frac{1}{2} + 1 = \frac{35}{18}$

c. $5 \cdot 0,\widehat{4} - 1,\widehat{1} = \frac{10}{9}$

d. $4,\widehat{3} + 2 \cdot 5,\widehat{4} - \frac{1}{2} = \frac{128}{9}$

47. Resolvé estos cálculos combinados.

a. $\frac{16}{7} : \frac{32}{14} - \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} =$

b. $-\frac{13}{25} \cdot \frac{125}{26} - \left(-2 + \frac{3}{4}\right) =$

c. $0{,}7 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{4} : 9 - 2{,}4 =$

d. $-\frac{15}{8} : \left(-\frac{5}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + 1 =$

e. $-0{,}\widehat{3} + 0{,}7 - \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} =$

f. $0{,}\widehat{4} \cdot \frac{9}{2} - 3{,}\widehat{5} + 2{,}3\widehat{1} =$

g. $-1 : \left(-0{,}\widehat{1}\right) - 0{,}\widehat{7} : \left(-1\right) - 1 =$

h. $-0{,}75 . \left(1 + 0{,}\widehat{3}\right) - 0{,}\widehat{4} : \left(-\frac{2}{3}\right) =$

i. $0{,}\widehat{8} : 0{,}\widehat{3} - \frac{3}{5} \cdot 0{,}\widehat{5} + \left(-\frac{12}{7}\right) : \left(-2\right) =$

j. $3{,}2\widehat{72} : \left(-\frac{6}{11}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot 0{,}3 - \left(-0{,}\widehat{5}\right) =$

Más operaciones con fracciones

- Tanto en la potenciación como en la radicación de expresiones fraccionarias, la potencia o la raíz se aplican al numerador y al denominador. Además, siempre hay que considerar el signo de la base antes de resolver:
  - en las potencias, si el exponente es par, el resultado siempre es positivo, y si es impar, el resultado tiene el mismo signo que la base;
  - las raíces de índice par de números negativos no pueden calcularse, y en todos los otros casos, la base y el resultado tienen el mismo signo.

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$

$\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}$ $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ → no se puede calcular.

- Si en la potenciación el exponente es cero, al igual que en los números enteros, el resultado es 1: $\left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

Potenciación de exponente negativo y de exponente fraccionario

- Si el exponente es un entero negativo, se invierte la fracción de la base y se eleva al mismo exponente, pero positivo. Y si en el exponente hay una fracción, la potencia se puede escribir como una raíz: el numerador del exponente se toma como exponente de la base y el denominador, como índice de la raíz. Esto solo puede realizarse cuando la raíz se puede calcular.

$\left(\frac{7}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^1 = \frac{5}{7}$ $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$ $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Propiedades de la potenciación y la radicación

- Son las mismas que las de los números enteros. Debe recordarse que en el caso de las raíces, las propiedades solo pueden aplicarse cuando cada una de las raíces puede calcularse.

Producto de potencias de igual base

$\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{1+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$

Cociente de potencias de igual base

$\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Potencia de otra potencia

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Producto de raíces de igual índice

$\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

Cociente de raíces de igual índice

$\sqrt[3]{-\frac{1}{81}} : \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{81}:\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

Raíz de otra raíz

$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$

Fijate bien

Las fracciones siempre se encierran entre paréntesis cuando se las eleva a cualquier potencia, al igual que los enteros negativos.

48. Resolvé aplicando propiedades.

a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{16}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^{15} =$

b. $\left[\left(\frac{7}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^6\right]^2 : \left(\frac{7}{5}\right)^{14} =$

c. $\sqrt{\frac{144}{81}:\frac{196}{121}} =$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2.048}} : \sqrt{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} =$

49. **Estrategia: pensalo al revés** Expresá estas raíces como potencias de exponente fraccionario, simplificá las fracciones y resolvé.

a. $\sqrt[12]{\left(\frac{1}{4}\right)^{6}} =$

c. $\sqrt[9]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{3}} =$

b. $\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}} =$

d. $\sqrt[14]{\left(\frac{1}{16}\right)^{7}} =$

50. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu respuesta.

a. La raíz cuadrada de una suma de fracciones es igual a la suma de las raíces cuadradas de cada fracción.

b. Si el exponente de un número es 0,2, entonces se está hallando la raíz quinta de ese número.

51. Resolvé estos cálculos combinados.

a. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} + 0,\hat{2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$

e. $0,0\hat{5} - \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{3} : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2} + \sqrt{\frac{1}{27}} : \sqrt{\frac{1}{3}} =$

b. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{4} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} - \left(\frac{7}{4}\right)^{0} =$

f. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{2} : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{2} + \sqrt[5]{-\frac{243}{32}} =$

c. $\sqrt[3]{\frac{3}{32}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} : \frac{5}{2} =$

g. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{3} - \sqrt{\frac{16}{25}} : \sqrt{\frac{9}{49}} - 0,6\hat{2} =$

d. $\left(0,\hat{5}\right)^{-1} : \frac{18}{25} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} + \sqrt{16+9} =$

h. $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}} \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}} - \sqrt[12]{\left(\frac{1}{8}\right)^{9}} : \sqrt[12]{\left(\frac{1}{8}\right)^{5}} =$

Otra forma de expresar números grandes y pequeños

- Para números muy pequeños o muy grandes, se utiliza la **notación científica**.
  Escribir un número positivo en notación científica consiste en expresarlo mediante la multiplicación entre un número mayor o igual a uno y menor que diez, y una potencia de 10. Si el número es negativo, se pasa a notación científica sin considerar el signo y luego se lo agrega adelante.

$0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$ $\qquad$ $-4.800.000 = -4{,}8 \cdot 10^{6}$

En la mayoría de las calculadoras, estos números pueden ingresarse presionando algunas teclas:

$3 \cdot 10^{-5} \rightarrow$ [3] [EXP] [–] [5]

$-4{,}8 \cdot 10^{6} \rightarrow$ [–] [4] [·] [8] [EXP] [6]

52. Escribí en notación científica los siguientes números.

a. 34.000.000 =

b. 0,0000007 =

c. 287.000.000 =

d. 0,0000035 =

e. 4.781.000 =

f. 0,00003478 =

53. Escribí todas las cifras de los siguientes números.

a. $3{,}9 \cdot 10^{8} =$

b. $8{,}2 \cdot 10^{-5} =$

c. $3{,}48 \cdot 10^{9} =$

d. $7{,}629 \cdot 10^{-8} =$

e. $3{,}4285 \cdot 10^{10} =$

f. $1{,}34506 \cdot 10^{-9} =$

54. Expresá en notación científica.

a. La superficie de la Tierra: 510.100.000 km² →

b. El tamaño del virus de la gripe: 0,0000001 m →

c. La temperatura del núcleo del Sol: 15.500.000° C →

55. Hacé de profe Mara expresó algunos números en notación científica, aunque no todos están bien. Corregilos.

a. $0{,}000000012 = 1{,}2 \cdot 10^{8}$

b. $-0{,}0000000033 = -3{,}3 \cdot 10^{-9}$

c. $25.000.000.000 = 25 \cdot 10^{9}$

56. Vero quiere calcular a cuántos kilómetros equivale un año luz, es decir, cuántos kilómetros recorre la luz en un año, y expresarlo en notación científica. Ya averiguó que la luz viaja a 300.000 kilómetros por segundo, pero le falta hacer algunas cuentas. Ayudala.

a. ¿Cuántos segundos hay en un año?

b. ¿A cuántos kilómetros equivale un año luz?

57. Resolvé estos cálculos utilizando las propiedades de la potenciación y expresá los resultados en notación científica. Después verificalos con la calculadora.

a. $\left(4{,}3 \cdot 10^{8}\right) \cdot \left(3{,}6 \cdot 10^{7}\right) : \left(7{,}4 \cdot 10^{6}\right) =$

b. $\left(3{,}3 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left(4{,}5 \cdot 10^{15}\right) : \left(5{,}2 \cdot 10^{-9}\right) =$

c. $\dfrac{\left(2{,}7 \cdot 10^{3}\right) \cdot \left(7{,}1 \cdot 10^{-8}\right)}{\left(2{,}9 \cdot 10^{-4}\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{-6}\right)} =$

d. $\dfrac{\left(5{,}2 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \left(4{,}3 \cdot 10^{7}\right) \cdot \left(3{,}8 \cdot 10^{-2}\right)}{\left(6{,}3 \cdot 10^{-2}\right) \cdot \left(1{,}8 \cdot 10^{12}\right) \cdot \left(7 \cdot 10^{4}\right)} =$

Tengo tarea

58. Resolvé y expresá los resultados en notación científica.

a. 3.500 · 1.857 · 546.000

b. 0,000028 · 36.000 : 0,004

c. $\dfrac{25.000 \cdot 3.200 \cdot 45.700}{0{,}0002 \cdot 0{,}000047}$

d. $\dfrac{0{,}0049 \cdot 0{,}000321 \cdot 0{,}045}{34.700 \cdot 16.805}$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

59. Resolvé estas sumas y restas. Expresá los resultados a partir de una fracción irreducible.

a. $-0,\overset{\frown}{27}+0,\hat{8}-2,\overset{\frown}{74}$

b. $-3,2\hat{4}-1,7+\frac{5}{2}$

c. $-\frac{9}{5}+1,7\overset{\frown}{45}-0,\hat{9}$

60. Resolvé estas multiplicaciones y divisiones. Expresá los resultados a partir de una fracción irreducible.

a. $\frac{25}{2}\cdot\frac{30}{5}:\frac{15}{4}$

b. $0,1\cdot 0,\hat{2}\cdot 1,\overset{\frown}{43}:\frac{4}{81}$

c. $0,1\cdot 0,\overset{\frown}{72}:1,3\overset{\frown}{21}\cdot\frac{9}{4}$

61. Planteá los siguientes cálculos y resolvelos.

a. A la diferencia entre dos décimos y ocho quintos se le agrega una unidad.

b. La mitad del cociente entre cuatro tercios y dos novenos.

c. La quinta parte del producto entre siete décimos y cinco medios.

62. Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $\frac{3}{4}:\frac{9}{16}-\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{35}-4$

b. $1,\hat{4}:2,5-\frac{9}{40}\cdot 7,\hat{1}-1$

c. $-2,\hat{3}+0,5\cdot 3,\hat{2}-1,4\hat{2}:0,2$

d. $0,\hat{3}\cdot 1,\hat{3}-0,3\hat{8}+0,2:\frac{9}{2}$

63. Simplificá las siguientes expresiones; si es posible, resolvé.

a. $\sqrt[7]{\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}}$

b. $\sqrt[8]{\left(\frac{4}{9}\right)^{4}}$

c. $\sqrt[18]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{6}}$

d. $\sqrt[6]{\left(0,\hat{1}\right)^{3}}$

e. $\sqrt[4]{\left(-0,\hat{4}\right)^{2}}$

f. $\sqrt[4]{\left(7,\hat{1}\right)^{2}}$

64. Resolvé aplicando propiedades.

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^{18}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{4}:\left(\frac{3}{5}\right)^{19}$

b. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{4}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\right]^{2}$

c. $\sqrt[3]{-\frac{4}{11}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{121}}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{128}}}:\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$

65. Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $\sqrt[3]{-\frac{1}{343}}\cdot 0,\hat{7}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot 2^{-5}$

b. $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}-\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1}-0,\hat{7}:0,\hat{4}$

c. $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{3}:\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{5}\right]^{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

d. $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{128}}}:\sqrt[6]{\frac{1}{2}}-1,4$

66. Martín dice que al mirar el cálculo sabe el resultado sin hacer cuentas. ¿Cómo lo sabe?

$$\left(\frac{\sqrt[7]{-\frac{1}{128}}:3,1\overset{\frown}{57}+\frac{25}{47}\cdot 4,2^{-5}}{412,15\hat{6}}\right)^{0}$$

67. Pasá estos números a notación científica.

a. 320.000

b. 0,000047

c. 3.547.000.000

d. 0,000237

68. Resolvé expresando en notación científica. Verificá con la calculadora.

a. $\frac{74.800\cdot 4.300}{0{,}0002}$

b. $\frac{0{,}0007\cdot 0{,}000034}{120.000}$

c. $\frac{37.844\cdot 240.000}{0{,}0001\cdot 0{,}0244}$

69. Determiná si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Podés ayudarte con la calculadora.

a. 34.479 es número primo.
b. 101 es número compuesto.
c. 4.420 es número primo.
d. 17.001 es número compuesto.

70. Indicá cuáles de estos números son múltiplos de 6.

a. 840
b. 3.240
c. 3. 465
d. 14.560

71. Descomponé estos números en sus factores primos.

a. 204
b. 320
c. 525
d. 1.000

72. Hallá el m.c.m. y el m.c.d. de estos números.

a. 245 y 320.
b. 480 y 2.300.
c. 408; 304 y 1.200.
d. 3.400; 1.600 y 650.

73. Planteá y resolvé las siguientes situaciones.

a. César tiene 320 películas de terror, 250 comedias y 180 de ciencia ficción. Quiere armar cajas que tengan películas de los tres tipos y que en todas haya, de cada género, la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad de cajas que puede utilizar para ello? ¿Cuántas películas de cada género habrá en cada caja?

b. Ayelén compra un paquete de yerba cada veinte días, uno de azúcar cada treinta días y un frasco de café cada treinta y ocho días. Si hoy compró las tres cosas juntas, ¿dentro de cuántos años volverá a comprar las tres cosas a la vez? ¿Por qué?

c. A Cami le regalaron una caja de bombones. Para no comerlos todos juntos, pensó en separarlos en tres partes iguales, pero le sobraba uno. Entonces, se le ocurrió repartirlos en cinco, para comerlos de lunes a viernes. Esta vez, si los repartía en partes iguales, le sobraban dos. Finalmente se dio cuenta de que si los separaba en ocho partes iguales, no le sobraba ninguno. ¿Cuántos bombones había en la caja, si eran menos de 200?

74. ¿Cuáles de las siguientes fracciones son expresiones decimales exactas? Rodealas.

a. $\frac{5}{3}$
b. $-\frac{150}{900}$
c. $\frac{9.000}{9.900}$
d. $-\frac{28}{15}$
e. $\frac{4.500}{13.500}$
f. $\frac{4.950}{990}$

75. ¿Cuáles de las fracciones de la actividad anterior corresponden a expresiones decimales periódicas puras?

76. Encontrá las fracciones irreducibles equivalentes a estas expresiones decimales y escribilas al lado de cada una.

a. 3,4 →
b. 27,8 →
c. 74,1 →
d. 140,87 →
e. 20,001 →
f. 30,28 →

77. Escribí al lado de cada una de estas fracciones la expresión decimal equivalente.

a. $\frac{34}{18} =$
b. $-\frac{200}{185} =$
c. $\frac{308}{105} =$
d. $\frac{40}{1.200} =$
e. $-\frac{2.000}{300} =$
f. $\frac{405}{9.900} =$

78. Al lado de cada uno de estos números periódicos escribí la fracción irreducible equivalente.

a. $0,\widehat{8} =$

b. $2,\widehat{6} =$

c. $3,\widehat{72} =$

d. $1,8\widehat{2} =$

79. Escribí cinco fracciones que estén entre los siguientes pares de números.

a. $-\frac{22}{30}$ y $-\frac{21}{30}$.

b. $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

c. $0{,}1$ y $0{,}\widehat{1}$.

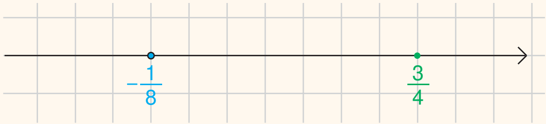
d. $1{,}\widehat{45}$ y $\frac{35}{22}$.

80. Ordená estos números de menor a mayor.

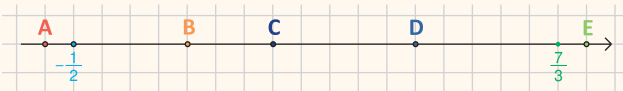
$-\frac{21}{5}$ $\quad 0{,}\widehat{7}$ $\quad -3{,}1\widehat{2}$ $\quad 0{,}3$

$-\frac{4}{3}$ $\quad 0{,}6$ $\quad -3{,}\widehat{1}$ $\quad -\frac{30}{9}$

81. Colocá en la recta los números enteros entre los que se encuentran estas fracciones.



82. Indicá el número racional (en fracción y expresión decimal) que representa cada letra.



83. Ubicá los siguientes números en la misma recta numérica.

$0{,}\widehat{6}$ $\quad -0{,}5$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad -0{,}\widehat{3}$

$\frac{4}{3}$ $\quad 0$ $\quad -\frac{1}{6}$

84. ¿Verdadero o falso?

a. Cualquier fracción positiva con el numerador mayor que el denominador está entre 0 y 1.
b. Si una fracción irreducible tiene 10 en el denominador, entonces equivale a una expresión decimal exacta.
c. Si el denominador de una fracción es 9 y el de otra es 10, entonces la primera equivale a una expresión decimal periódica y la otra, a una exacta.

85. Resolvé estas sumas y restas con números racionales.

a. $-1+\frac{3}{5}-\frac{4}{3}-\frac{3}{10}$

b. $-1{,}\widehat{8}+\frac{2}{3}+0{,}2\widehat{3}$

c. $0{,}\widehat{7}+2{,}\widehat{82}-2{,}3\widehat{4}-\frac{181}{99}$

d. $5{,}4\widehat{3}-3{,}\widehat{27}-2{,}1\widehat{8}-\frac{1}{45}$

86. Resolvé estas multiplicaciones y divisiones con números racionales.

a. $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}\cdot\frac{25}{36}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$

b. $-\frac{7}{52}\cdot\frac{26}{14}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{9}{2}\right)$

c. $-\frac{9}{5}\cdot 0{,}\widehat{25}:(-0{,}5)$

d. $-0{,}2\widehat{3}\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)\cdot 0{,}8:\left(-1{,}\widehat{4}\right)$

87. Planteá y resolvé los siguientes cálculos.

a. El cociente entre doce quintos y cinco sextos.

b. La tercera parte del producto entre veintiséis tercios y nueve treceavos.

c. La quinta parte del cociente entre quince veintidosavos y treinta onceavos.

88. Sin hacer todas las cuentas, señalá cuál de estos cálculos da como resultado un número entero. Explicá cómo te das cuenta.

a. $5:\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-2$

b. $5:\frac{1}{2}-\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)-2$

89. Resolvé los siguientes cálculos combinados y expresá los resultados como fracción irreducible.

a. $3:\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{35}{8}\right):\left(-\frac{5}{4}\right)-2$

b. $-0,\widehat{2}\cdot\frac{9}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right):\frac{9}{16}-1,\widehat{4}$

c. $\frac{9}{5}\cdot 0,2\widehat{8}+1,\widehat{5}:\frac{7}{3}-\left(-0,\widehat{4}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$

d. $-3,2\widehat{8}:\left(-0,\widehat{2}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{35}{49}\right)-1,\widehat{6}$

90. Expresá como raíz cada una de estas potencias y resolvelas.

a. $(0,\widehat{4})^{\frac{1}{2}}$

b. $\left(\frac{49}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

c. $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$

d. $\left(-\frac{1}{64}\right)^{-\frac{5}{3}}$

91. Expresá cada raíz como potencia de exponente fraccionario y resolvé usando las propiedades de la potencia.

a. $\sqrt[5]{32^2}\cdot\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[20]{32^7}$

b. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}:\sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^8}$

c. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^5}\cdot\sqrt[20]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-101}}:\sqrt[5]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-9}}$

d. $\sqrt[3]{4^{-5}}:\sqrt[9]{4^{-12}}\cdot\sqrt[6]{4^{-7}}$

92. Resolvé aplicando propiedades.

a. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$

b. $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{9}}:\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

c. $\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^3\right]^7:\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^6\right]^4$

d. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}:\left(\sqrt[5]{-\frac{1}{27}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)$

93. Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $0,\widehat{3}-\sqrt[3]{-\frac{16}{81}}:\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{3}{2}\right)^7:\left(-\frac{3}{2}\right)^5$

b. $\frac{9}{4}-\sqrt[243]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{81}}\cdot 0,5-\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^7:\left(-\frac{5}{2}\right)^6\right]^2$

c. $\sqrt[5]{-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}-2,5\widehat{3}-\sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^9}}$

d. $2,\widehat{8}:1,\widehat{4}-\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}-0,\widehat{2}$

e. $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}:\left(-\frac{1}{3}\right)+0,3\widehat{8}:1,\widehat{6}$

94. Emi y Tomi resolvieron el mismo cálculo de dos maneras distintas y a los dos les dio el mismo resultado. ¿Quién lo resolvió correctamente? ¿Cuál es el error en el otro?

Emi

$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}+0,\widehat{3}:\left(-\frac{7}{11}\right)^0=$

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:1=$

$0:1=0$

Tomi

$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}+0,\widehat{3}:\left(-\frac{7}{11}\right)^0=$

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:1=$

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$

95. Expresá en notación científica los siguientes números.

a. 12.340.000
b. 0,0000072
c. –8.000.000.000.000
d. 0,001
e. 154.000.000
f. –0,000000001
g. 72.010.000.000
h. –0,5

96. Escribí todas las cifras de estos números.

a. $2\cdot 10^7$
b. $8,4\cdot 10^{-5}$
c. $3,34\cdot 10^9$
d. $4,75\cdot 10^{-8}$
e. $1,001\cdot 10^{-2}$
f. $8,8\cdot 10^5$
g. $2,5\cdot 10^{-9}$
h. $7\cdot 10^{-7}$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Saquen una hoja

AUTOEVALUACIÓN

Marcá la opción correcta.

1. El m.c.d. entre 380 y 2.400 es:

- ☐ 45.600
- ☐ 20
- ☐ 800
- ☐ 10

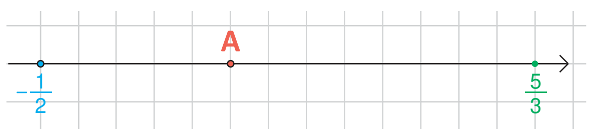
2. Mariana tiene tres sobrinos: Majo, que la visita cada 10 días; Ale, que la visita cada 8 días y Romi, que va a visitarla cada 12 días. ¿Cada cuántos días se reúne Mariana con sus tres sobrinos en su casa?

- ☐ Cada 30 días.
- ☐ Cada 12 días.
- ☐ Cada 60 días.
- ☐ Cada 120 días.

3. Indicá cuál de estas fracciones es una expresión decimal exacta.

- ☐ $\frac{31}{990}$
- ☐ $\frac{4.995}{9.990}$
- ☐ $\frac{405}{999}$
- ☐ $\frac{3.075}{4.995}$

4. ¿Qué número representa **A** en la siguiente recta numérica?



- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ 0,3
- ☐ $0,\hat{3}$
- ☐ 0

5. ¿Cuál es el resultado del cálculo?

$$\frac{9}{4}\cdot 0,\hat{2}+1,\hat{6}:\left(-\frac{3}{2}\right)-1,3\hat{6}$$

- ☐ $-\frac{89}{45}$
- ☐ $\frac{11}{45}$
- ☐ $-\frac{19}{9}$
- ☐ $\frac{1}{9}$

6. Luna resolvió este cálculo utilizando exponentes fraccionarios. El profe la felicitó porque llegó al resultado correcto. ¿A qué resultado llegó?

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{2}}:\sqrt[15]{\left(\frac{1}{4}\right)^{49}}$$

- ☐ −16
- ☐ 16
- ☐ $\frac{1}{16}$
- ☐ $-\frac{1}{16}$

7. ¿Cuál es el resultado de este cálculo combinado?

$$1,\hat{6}:0,\hat{3}-\sqrt[5]{-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}-\left(\sqrt{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}}\right)^{2}-1,2\hat{6}$$

- ☐ $\frac{26}{11}$
- ☐ $-\frac{26}{15}$
- ☐ $-\frac{41}{15}$
- ☐ $\frac{41}{15}$

8. El resultado de uno de estos cálculos es $2,25\cdot 10^{12}$. ¿De cuál se trata?

- ☐ $\frac{4.500\cdot 2.000}{0,0004}$
- ☐ $\frac{45.000\cdot 20.000}{0,0004}$
- ☐ $\frac{45.000\cdot 20.000}{0,004}$
- ☐ $\frac{45.000\cdot 2.000}{0,0004}$

Controlá tus respuestas en las páginas 159 y 160.

Esto ya lo sabía...

1. Florencia compró un rollo de servilletas de papel descartables. El rollo tiene 30 servilletas cuadradas y la medida de cada lado es **l**. Escribí la expresión que representa cada oración.

   a. El área de cada servilleta.

   b. El perímetro de cada servilleta.

   c. El área de 4 servilletas unidas.

   d. El perímetro de 3 servilletas unidas.

   e. El área de todas las servilletas del rollo unidas.

   f. El perímetro de todas las servilletas del rollo unidas.

2. Si **f** representa la edad actual de Flor, escribí en lenguaje simbólico.

   a. Al triple de su edad, se la disminuye en dos.

   b. El doble de la edad que tendrá en un año.

   c. Un año más que el doble de su edad.

Matemundo



¿Sabías que tu peso en la Luna es diferente al que tenés acá, en la Tierra? ¿Y que sería distinto a los dos anteriores si estuvieses en Marte? Sí. El peso de cualquier cosa varía según el satélite o el planeta en el que esté, o mejor dicho, de la gravedad de ese lugar.

Para calcular el peso de una persona o cosa, conocido su peso en la Tierra, se puede usar la fórmula $P = \frac{P_T \cdot g}{9,8\ m/s^2}$, donde P_T es el peso en la Tierra, g es la gravedad del satélite o el planeta en el que se quiera calcular el peso y 9,8 m/s^2 es la gravedad promedio en la Tierra.

Por ejemplo, en Mercurio, cuya gravedad promedio es de 3,7 m/s^2, el peso de una persona que en la Tierra tiene 60 kg sería de:

$$P = \frac{60kg \cdot 3,7\ m/s^2}{9,8\ m/s^2} = 22,65\ kg$$

Livianito, ¿no?

Calculá tu peso en:

- Marte ($g = 3,71\ m/s^2$)
- Luna ($g = 1,62\ m/s^2$)

Nota: en este libro, cuando se emplea el término “kilogramo” (unidad de masa), en realidad se hace referencia al “kilogramo fuerza”, porque se alude al peso del objeto. En el habla corriente no se toma en cuenta esta distinción.

Expresiones algebraicas

Números y letras

- Se usan **expresiones algebraicas** para indicar relaciones numéricas, combinando letras y números. Los números se denominan **coeficientes** y las letras (con sus exponentes) son la **parte literal**.
  Por ejemplo, $4a^5$ es una expresión algebraica.
  ↑ Coeficiente ↑ Parte literal

- En adelante se trabajará con expresiones en las que los exponentes de las letras sean números enteros no negativos. Si la expresión algebraica tiene un solo término, se llama **monomio**. Se denomina **binomio** si posee dos términos y **trinomio**, si tiene tres. En general, se llama **polinomio** a las expresiones con varios términos.

- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el valor que se obtiene al reemplazar la parte literal por un determinado número.
  Por ejemplo, el valor numérico de $4a^5$ para $a = 1$ es 4 porque: $4 \cdot 1^5 = 4 \cdot 1 = 4$.

Fijate bien

No es lo mismo decir "el anterior del doble de un número" que "el doble del anterior de un número". Este último se expresa $2 \cdot (x - 1)$.

3. Escribí en lenguaje simbólico, es decir, usando expresiones algebraicas.

a. El anterior del doble de un número. →

b. La mitad del cubo de un número. →

c. El siguiente del triple del cuadrado de un número. →

d. La diferencia entre cuatro y el triple del cuadrado de un número. →

4. **Estrategia: leer en voz alta** Escribí en lenguaje coloquial.

a. $5a^2$ →

b. $2b^3 + 1$ →

c. $4c^2 - 1$ →

d. $d^3 - d^2$ →

5. Hallá el valor numérico de cada una de estas expresiones algebraicas para $a = 3$ y $a = -1$.

a. $3a + 1$ →

b. $2a^2 + 5$ →

c. $3a^3 - 2a^2 + 2$ →

d. $\frac{1}{5}a^2 - 2a + 1$ →

Operaciones con expresiones algebraicas

Sumas y restas

- Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal, es decir, la misma letra elevada al mismo exponente. Más adelante se utilizarán monomios con más de una letra.
  Para sumar o restar dos monomios semejantes, se suman o restan sus coeficientes y se agrega la misma parte literal.

  $2x^2 + 3x^2 = 5x^2 \longrightarrow$ El exponente queda igual. $6y^3 - 2y^3 = 4y^3 \longrightarrow$ El exponente queda igual.

  La suma o la resta de dos monomios que no son semejantes quedan expresadas (no se sigue operando).

  $7c^2 + 3c^5 \longrightarrow$ Queda así. $9m^3 - 2m \longrightarrow$ Queda así.

- Para sumar o restar dos polinomios, se pueden agrupar los términos semejantes. Una manera fácil de verlo es disponiéndolos en forma vertical. Por ejemplo, para hacer $\left(7a^4 + 2a^2 - 5a^3\right) + \left(-a^3 + 6a^2 - 5a\right)$, se organizan los términos respetando sus exponentes y después se suma. Lo mismo para restarlos.

$$\begin{array}{rrrrr} & 7a^4 & -5a^3 & +2a^2 & \\ + & & -a^3 & +6a^2 & -5a \\ \hline & 7a^4 & -6a^3 & +8a^2 & -5a \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 7a^4 & -5a^3 & +2a^2 & \\ - & & -a^3 & +6a^2 & -5a \\ \hline & 7a^4 & -4a^3 & -4a^2 & +5a \end{array}$$

Productos y cocientes

- Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen sus coeficientes y su parte literal.

  $5a^3 \cdot 2a^4 = 10a^7 \longrightarrow$ Se suman los exponentes. $14b^5 : 2b^3 = 7b^2 \longrightarrow$ Se restan los exponentes.

6. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso, explicá el error.

a. $3a + 2a^2 = 5a^3$

b. $2b^4 \cdot 3b^2 = 6b^8$

c. $4y^5 - 3 + 5y^5 = 9y^5 - 3$

d. $-7a^3 : a = -7a^2$

e. $2f^5 \cdot 3f = 6f^5$

Fijate bien

Recordá que si los términos no son semejantes, las sumas y las restas quedan expresadas.

7. Resolvé estas sumas y restas de expresiones algebraicas.

a. $-3a^5 + 4a^5 =$

b. $-7p^4 + 8p^2 - 2p^4 =$

c. $\left(3 - 2c^4 + c - 6c^3\right) - \left(-7c^2 - 6c^3 + 8\right) =$

d. $3r^5 + 2r - 4r^5 - 6r =$

e. $-3x^2 - \left(2x^2 - 5x^2\right) - 2 =$

f. $-\left(-4y^3 + 2y^2\right) - \left(-5y^2 - 4y^3 + 7\right) =$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

8. Resolvé estas multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

a. $-2y^5 \cdot 4y^2 =$

b. $-14r^4 : (-2r) =$

c. $-3p^7 \cdot (-2p^4) =$

d. $-4x^4 \cdot (-6) =$

e. $-3w^4 \cdot (-2w) =$

f. $4c \cdot (-3c^7) =$

g. $-8d^4 : (-2d) =$

h. $-6g^7 : (-2g^3) =$

9. Resolvé estos cálculos combinados de expresiones algebraicas. No te olvides de respetar el orden de las operaciones.

a. $6p^3 + 2p^2 \cdot (-3p) =$

b. $1{,}8w : (1{,}2w - 0{,}6w) =$

c. $\left(\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{5}b^3\right) \cdot \left(\frac{1}{6}b - b\right) =$

d. $\frac{3}{2}a^4 : (-3a) + 2a^3 + \frac{1}{4}a^3 =$

e. $(1{,}7c^7 - 2{,}5c^7 + c^7)(-2c^2 - 1{,}2c^2) =$

10. Completá la tabla ubicando estos resultados en el cálculo que le corresponde.

$\frac{13}{10}v^5$ | 0 | $-\frac{13}{2}v^5$ | $\frac{1}{10}v^5$ | $-\frac{9}{10}v^5$

Cálculos	Resultados
$-\frac{3}{2}v^2 \cdot v^3 + (-5v^4 \cdot v) =$	
$\frac{3}{4}v^4 \cdot \frac{2}{5}v - \left(-2v^3 \cdot \frac{2}{5}v^2 + v^5\right) =$	
$v^3\left(-\frac{2}{5}v^2\right) + \left(-\frac{3}{5}v^6 : v + \frac{1}{10}v^3v^2\right) =$	
$-\frac{8}{5}v^8 : (-v^3) - \left[-\frac{1}{10}v^2(-3v^3)\right] =$	
$-\frac{3}{5}v^2.v^3 - \left(v^5 - \frac{2}{5}v^2 \cdot 4v^3\right) =$	

Tengo tarea

11. Sin hacer todas las cuentas, indicá cuáles de estos cálculos dan como resultado un monomio. ¿Cómo te das cuenta?

a. $-2b^4 + \frac{1}{4}b$

b. $\frac{3}{5}r^5 + \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{5}r^5$

c. $4x^0 + 7$

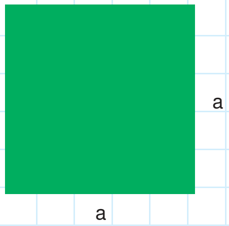
12. Escribí un producto de monomios cuyo resultado sea el indicado.

a. $16b^3$

b. $\frac{9}{5}p^4$

13. Escribí, de la forma más sencilla posible, las expresiones que representan el perímetro y el área cada figura.

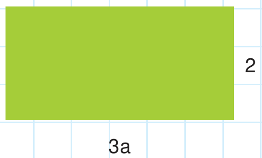
a.



Área:

Perímetro:

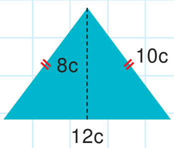
b.



Área:

Perímetro:

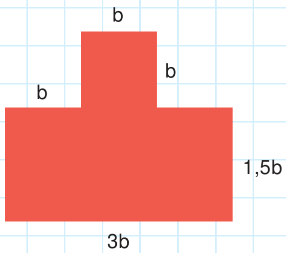
c.



Área:

Perímetro:

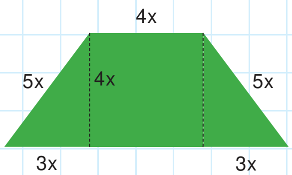
d.



Área:

Perímetro:

e.



Área:

Perímetro:

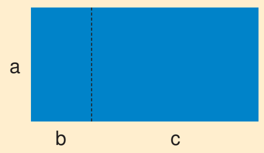
Tengo tarea

14. Dibujá el esquema de una figura con un área de $6b^2$ y un perímetro de 12b.

Propiedad distributiva y factor común

Propiedad distributiva

- En la figura, el área del rectángulo puede calcularse de dos formas:



Considerando la base entera: $a(b+c)$.
O sumando el área de cada uno de los dos rectángulos que lo forman: $ab+ac$.
En consecuencia, $a(b+c)=ab+ac$

- A esta propiedad se la conoce como **distributiva** de la multiplicación respecto de la suma y se suele señalar así:

$$a(b+c)=ab+ac$$

- La multiplicación también puede distribuirse con la resta. Por ejemplo, $3(4r-5)=3\cdot 4r-3\cdot 5=12r-15$
- Como en la multiplicación no importa el orden de los factores, también puede distribuirse así:

$$(-6a+2)\cdot(-0{,}5)=-6a\cdot(-0{,}5)+2\cdot(-0{,}5)=3a-1$$

También: $(4x+5)(2y-1)=4x\cdot 2y-4x\cdot 1+5\cdot 2y-5\cdot 1=8xy-4x+10y-5$

- La división puede distribuirse con la suma y la resta solo cuando el divisor es un monomio.

Por ejemplo: $(4x+6):2=4x:2+6:2=2x+3$. En cambio, $2:(4x+6)$ no se puede distribuir.

Factor común

- Cuando se distribuye la multiplicación en una suma o una resta, la igualdad puede mirarse al revés.
Es decir, el producto $2(3x+4)=2\cdot 3x+2\cdot 4$ puede escribirse como:

$$2\cdot 3x+2\cdot 4=2(3x+4)$$

Escrito así, se puede ver que se repite el 2 como factor,
es decir, 2 es el **factor común** de ambos términos.

Por ejemplo, $9y+6$ tienen en común que ambos términos se pueden obtener multiplicando una expresión por "3".
Es decir, "3" es el factor común: $9y+6=3\cdot 3y+3\cdot 2=3(3y+2)$.

Otro ejemplo: $8m^3-12m^2=4m^2\cdot 2m-4m^2\cdot 3=4m^2(2m-3)$.

15. Aplicá la propiedad distributiva.

a. $2a(3a+4)=$

b. $(2r^3+5r)3r^2=$

c. $(8p^4-16p^2):4p^2=$

d. $\frac{1}{5}m^3\left(\frac{5}{6}m^2-\frac{25}{3}\right)=$

e. $(4w^3+3y^5)\left(\frac{1}{4}w^2-\frac{2}{3}y^4\right)=$

f. $\left(-\frac{2}{5}x^2p^3+3x\right)(4x^4-3p^2)=$

16. Completá los términos faltantes.

a. $4z^5\left(3z^2 - 2x^5\right) = 12z^7 \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $-2p^3\left(4y^5 - 8p^7\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots + 16p^{10}$

c. $-\frac{1}{4}r^5\left(-\frac{2}{3}r^8 \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = \frac{1}{6}r^{13} - \frac{1}{5}r^8$

d. $\left(-\frac{3}{8}n^7 - \frac{4}{5}n^4\right) : \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3}{16}n^4 + \frac{2}{5}n$

17. **Estrategia: pensar al revés** Encontrá el mayor factor común y expresá como producto.

a. $6x^2 + 10 =$

b. $15x^4 - 25x^2 =$

c. $\frac{3}{5}y^4 + \frac{9}{25}y^3 =$

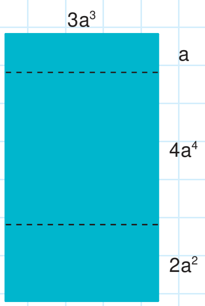
d. $6z^2 + 3z^3 - 9z =$

e. $\frac{8}{9}m^4 - \frac{2}{3}m^2 - \frac{10}{3}m^3 =$

Fijate bien

Si todos los coeficientes son enteros, el mayor factor común es el m.c.d. de todos ellos, acompañado de la variable con su menor exponente.

18. Expresá de dos formas distintas el área de la siguiente figura.



19. **Hacé de profe** Ariel resolvió este producto, pero no es correcto. ¿Cuál fue su error?

$$3y^2\left(6y + 10\right) = 18y^2 + 10y^2$$

Tengo tarea

20. Indicá la respuesta correcta. La expresión $3n^5\left(4n^3 - 6n\right)$ equivale a:

- ☐ $12n^8 - 18n$
- ☐ $12n^5 - 18n^5$
- ☐ $12n^{15} - 18n^5$
- ☐ $12n^8 - 18n^6$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

21. Escribí en lenguaje simbólico.

a. El anterior del cubo de un número.

b. El cubo del siguiente de un número.

c. La tercera parte del cuadrado de un número.

d. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos.

22. Escribí en lenguaje coloquial.

a. $\frac{1}{4}a^2$

b. b^3-b

c. $(c+1)^2+(c-1)^2$

d. $\frac{2}{3}(d^3-1)$

23. Completá el cuadro con el valor numérico de cada expresión para los valores indicados de n.

Expresión algebraica	$n=-2$	$n=-\frac{1}{2}$
$2n^3-3$		
n^2+2n+1		
$-\frac{1}{2}n^3-\frac{2}{5}n^2+3$		
$-\frac{3}{2}n^3-n-\frac{1}{2}$		
$\frac{5}{4}n^4-\left(\frac{5}{2}n^2\right)+1$		

24. Resolvé las siguientes sumas y restas.

a. $-\frac{3}{4}a^3+\frac{1}{2}a^3-\left(-\frac{2}{3}a^3\right)$

b. $-2y^3-\frac{1}{2}y^3-\left(-\frac{1}{4}y^3-\frac{3}{2}y^3\right)+1$

c. $-8p^4-\left(-\frac{1}{3}p^4+\frac{3}{2}p^4-\frac{2}{3}p^4\right)$

d. $-\frac{3}{5}n^2+\left(-\frac{3}{5}n-\frac{2}{3}n^2\right)-\frac{7}{5}n$

25. Resolvé.

a. $-\frac{1}{4}a^3\cdot\left(-2a^2\right)$

b. $-\frac{3}{2}d^6:\left(-\frac{9}{4}d\right)$

c. $4n^2\cdot\left(-2n^7\right):n^3$

d. $\frac{4}{5}x^5:\left(4x^4\right)\cdot 10x$

26. Señalá la respuesta correcta.

a. $-3w^8:w^2-\left(-5w^{10}:w^4\right)=$

$2w^4$ $-3w^6$ $2w^6$

b. $-4y^4\left(-2y^3\right)-\left(-3y^8:y+y^3\cdot y^4\right)=$

$10y^4$ $10y^7$ 0

c. $-8z^6\left(-3z^3\right)-\left[-\frac{1}{2}z^{10}:\left(-\frac{1}{48}z\right)\right]=$

0 $-48z^9$ $48z^9$

27. Aplicá la propiedad distributiva.

a. $-3b^4\left(2b^5-3b^7+2b^3\right)$

b. $\left(-\frac{3}{2}c^2+\frac{25}{3}c^6-\frac{3}{4}c^5\right):\frac{1}{3}c$

c. $\left(3d^5a^2-\frac{1}{4}d^7a^3-\frac{7}{2}d^8a^7\right):\left(-2d^3a^2\right)$

28. Obtené el máximo factor común de las siguientes expresiones algebraicas y expresalas como producto.

a. $4a^5-a^3-3a^7$

b. $-9c^5-3c^7+6c^4$

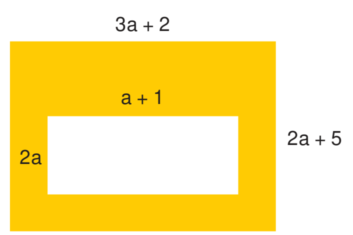
c. $\frac{4}{3}d^3-\frac{8}{3}d^5-\frac{16}{3}d^7$

29. Mary quiere escribir como producto algunas expresiones algebraicas, pero usó factores "no tan usuales". Completá los términos que faltan.

a. $3x^5-4x^2+2x^4=-x\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots^{4})$

b. $-2a^4+3a-a^3=\frac{1}{2}a\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

30. Escribí la expresión del área de la figura coloreada y realizá todas las operaciones que puedas.



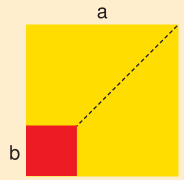
Diferencia de cuadrados

- Para obtener la **diferencia** de dos **cuadrados** a partir de un producto, hay que multiplicar la suma de dos términos por la resta de los mismos términos.

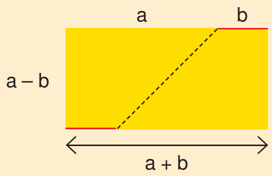
$$(a+b)(a-b)=a\cdot a+a\cdot b-a\cdot b-b\cdot b=a^2-b^2$$

Es decir: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Esta igualdad puede verificarse a partir del área de la figura que resulta de la resta del cuadrado grande menos el pequeño.



Área $= a^2 - b^2$



Área $=(a+b)(a-b)$

31. Expresá como producto las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $x^2-9=$

b. $y^2-\frac{1}{25}=$

c. $4z^2-\frac{9}{4}=$

d. $\frac{49}{36}-\frac{9}{4}c^2=$

e. $16p^4-\frac{4}{25}p^2=$

f. $-\frac{64}{25}p^6+9p^8=$

32. **Hacé de profe** Corregí la tarea de Armando. Si algo está mal, indicá cuál fue su error.

a. $(3a+2)(3a-2)=9a-4$

b. $16x^{36}-25y^{16}=(4x^6+5y^4)(4x^6-5y^4)$

c. $25b^2-36x^4=(5b+6x^2)(5b-6x^2)$

d. $\frac{1}{4}-\frac{9}{25}y^8=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}y^6\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}y^6\right)$

33. **Estrategia: empezar por el final** Completá con las expresiones que faltan para que en todos los casos se obtengan diferencias de cuadrados.

a. $16x^2-$ .... $=(4x+$ .... $)($ .... $-3)$

b. $4-$ .... $=($ .... $-9z^3)($ .... $)$

c. .... $=\left(\text{............}+\frac{8}{7}\right)\left(\frac{11}{14}r^4-\text{............}\right)$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Cuadrado de un binomio

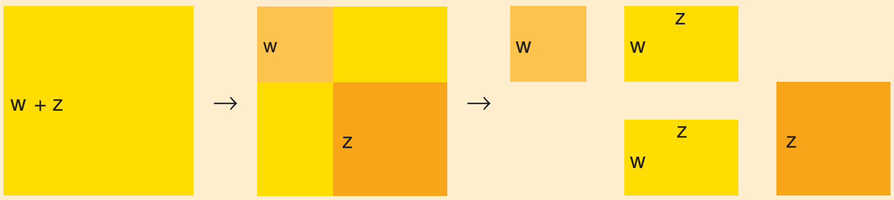
- El **cuadrado de un binomio** puede calcularse multiplicando el binomio por sí mismo, aplicando la propiedad distributiva.

$$(w+z)^2=(w+z)\cdot(w+z)=w\cdot w+w\cdot z+z\cdot w+z\cdot z=w^2+2wz+z^2$$

De esta forma se obtiene un trinomio.

$$(w+z)^2=w^2+2wz+z^2$$

Es decir, el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, sumado al doble producto del primero y del segundo término, más el cuadrado del segundo término.
Esta igualdad puede verse en forma gráfica a partir del cálculo del área de un cuadrado de lado w + z.



Área: $(w+z)^2$ La misma área como suma de las áreas de cada región: $w^2+2wz+z^2$

34. Desarrollá los siguientes cuadrados.

a. $(a+5)^2=$

b. $(b-2)^2=$

c. $(2b-3)^2=$

d. $(3c-4a^2)^2=$

e. $(7+6b^5)^2=$

f. $(3f^5+2f^3)^2=$

g. $(-7g^3+3g^4)^2=$

h. $(-7g^3-3g^4)^2=$

35. **Hacé de profe** Gabi desarrolló estos cuadrados, pero cometió algunos errores. Identificalos y señalá la respuesta correcta.

a. $(3a+2)^2=9a^2+6a+4$

b. $(7a^2-3)^2=49a^2-42a^2+9$

c. $(5b^4-6b^5)^2=25b^8-60b^5+36b^{10}$

d. $(3a^4-a^2)^2=9a^{16}-6a^8-a^4$

36. **Estrategia: empezar por el final** Completá las expresiones faltantes.

a. $\left(2h-\frac{1}{3}\right)^2=4h^2$ .... $+\frac{1}{9}$

b. $\left(-8t^3+\right.$ .... $\left.\right)^2=$ .... $-$ .... $+\frac{16}{25}$

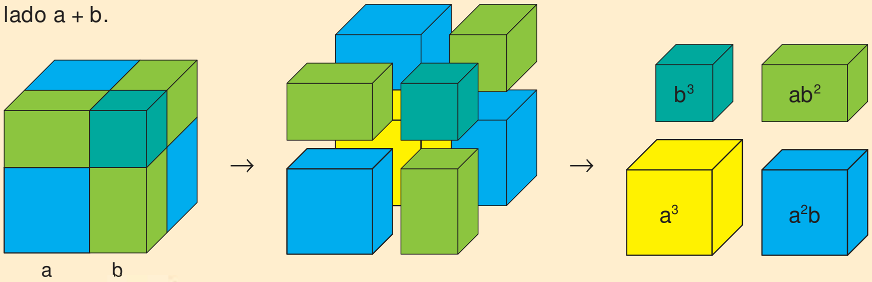
Cubo de un binomio

- Para calcular el **cubo de un binomio**, puede multiplicarse el binomio por sí mismo, y al resultado volverlo a multiplicar por el mismo binomio, $(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)$.

  Al volver a distribuir se obtiene: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

  Para no realizar todas las veces la distribución, puede recordarse que el cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, sumado al cubo del segundo término.

  La igualdad también puede verificarse geométricamente a partir de la descomposición del volumen de un cubo de lado a + b.



Volumen: $(a+b)^3$ El mismo volumen como suma de los volúmenes de cada sector: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

37. Desarrollá los siguientes cubos.

a. $(a+4)^3=$

b. $(3b-2)^3=$

c. $(-5c^2-3)^3=$

d. $\left(-\frac{1}{2}d^3-d^2\right)^3=$

38. Sin realizar todos los desarrollos, determiná cuál de estos cubos equivale a $x^{15}-x^{10}+\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{27}$. Explicá cómo te das cuenta.

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(x^5+\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(x^5-\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(x^{12}-\frac{1}{3}\right)^3$

39. **Estrategia: empezar por el final** Completá con las expresiones que faltan.

a. $\left(\text{..........}-\frac{1}{3}\right)^3=8y^3$ ....

b. $(w^2\ \text{..........})^3=$ .... $-3w^4$ ....

40. **Hacé de profe** Marisa dice que al desarrollar $(x+y)^3$, los exponentes de **x** se pueden escribir, comenzando desde adelante, empezando por 3 y bajando de a uno; y los de **y**, empezando por 3 desde atrás y bajando de a uno. ¿Tiene razón? ¿Qué pasará con los exponentes del desarrollo de $(x+y)^2$?

¿Cuánto vale la incógnita?

- Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. A la letra se la conoce como incógnita. Puede haber ecuaciones con más de una incógnita, pero por ahora se trabajará con una sola.

$$\underbrace{4x+2}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{3x-1}_{\text{Segundo miembro}}$$

- Resolver una ecuación significa hallar los valores de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad. Para eso se puede realizar la misma operación en ambos miembros, ya que la igualdad no se altera, y así se pueden "eliminar" los números y operaciones hasta "despejar" la incógnita, es decir, hallar la solución.
  Una ecuación puede tener una sola solución, más de una, o puede no tener solución.
  Para verificar que el valor obtenido es correcto, se reemplaza en la incógnita y se observa si se cumple la igualdad.

$2a + 5 = 15$
$2a + 5 - 5 = 15 - 5$
$2a = 10$
$2a : 2 = 10 : 2$
$a = 5$

Una solución única.

Verificación

$2 \cdot 5 + 5 = 15$
$10 + 5 = 15$
$15 = 15$ ✓

$b^2 - 1 = 3$
$b^2 - 1 + 1 = 3 + 1$
$b^2 = 4$
$b = 2$ | $b = -2$

Más de una solución.

Verificación

$2^2 - 1 = 3$; $(-2)^2 - 1 = 3$
$4 - 1 = 3$; $4 - 1 = 3$
$3 = 3$ ✓ ; $3 = 3$ ✓

$c^2 + 1 = 0$
$c^2 + 1 - 1 = 0 - 1$
$c^2 = -1$

No tiene solución (ningún número real elevado al cuadrado es igual a un número negativo).

Dos casos muy particulares

- $2(d+1) = 2d + 2$
  $\cancel{2d} + \cancel{2} = \cancel{2d} + \cancel{2}$
  $0 = 0$
  Tiene infinitas soluciones
  ($0 = 0$ es verdadero para cualquier valor de d).

- $2e - 1 = 2e - 4$
  $2e - 2e = -4 + 1$
  $0 = -3$
  No tiene solución (para ningún valor de e se cumple la igualdad $0 = -3$).

41. Resolvé estas ecuaciones y verificá las soluciones. Si tiene infinitas, elegí dos o tres valores para verificarla.

a. $3x + 2 + 2x = 12$

d. $4(2x+1) = 8x + 3$

b. $2(3x+2) = 6x + 4$

e. $\sqrt{x+1} = 4$

c. $4(2x+1) - 2 = 3(2x+2) - 4$

f. $x^2 + 3 = 12$

42. Indicá la opción correcta en cada caso.

a. $3(2x+2)+4=-2(2x-6)-2$

La solución es $x=-5$. La solución es $x=0$. La solución es $x=\frac{6}{5}$.

b. $-4(2x+2)+2=2(x-4)-2$

La solución es $x=2$. La solución es $x=-2$. La solución es $x=\frac{2}{5}$.

c. $(x+2)^2+2=4x+10$

Las soluciones son $x=2$ y $x=-2$. La solución es $x=2$. No tiene solución.

d. $x^4+6-2x=5-2x$

Las soluciones son $x=1$ y $x=-1$. La solución es $x=-1$. No tiene solución.

e. $(x-1)^2+8=(x+1)(x-1)+10-2x$

No tiene solución. La solución es $x=1$. Tiene infinitas soluciones.

43. Planteá la ecuación que representa cada situación y resolvela.

a. La sexta parte de la edad que tendrá Valen dentro de un año es igual a la diferencia entre el triple de su edad y ciento veintisiete tercios. ¿Qué edad tiene Valen?

b. El cuadrado de la suma entre un número y tres es igual a la suma entre el séxtuplo de ese número y dieciocho. ¿Cuál puede ser el número? ¿Hay más de una posibilidad?

c. El cubo de la diferencia entre un número y dos es igual a la diferencia entre doce veces ese número y el séxtuplo de su cuadrado. ¿De qué número se trata?

d. La mitad de la diferencia entre un número y la raíz cúbica de veintisiete octavos es igual al producto entre el opuesto de tres cuartos y el inverso de un medio. ¿De qué número se trata?

Fijate bien

Recordá que el opuesto de 4 es -4, y el inverso de 4 es $\frac{1}{4}$.

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Ecuaciones con proporciones

- Una **razón** es el cociente entre dos números; por ejemplo, $\frac{3}{4}$ es la razón entre 3 y 4.
  Cuando dos razones son iguales, forman una **proporción**. Es decir, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ es una proporción y en ella se cumple que ad = bc. Esta es la **propiedad fundamental de las proporciones** y, en ocasiones, resulta muy útil para resolver ecuaciones.

$$\frac{4}{5}=\frac{a}{10} \rightarrow 4\cdot 10=5a$$
$$40=5a$$
$$8=a$$

44. Resolvé estas ecuaciones y verificá la solución. Cuando sea necesario, usá la propiedad fundamental de las proporciones.

a. $\frac{a+1}{4}=\frac{5}{6}$

b. $\frac{b-2}{5}=\frac{b+3}{\sqrt[3]{-64}}$

c. $\frac{d^2}{-\frac{12}{5}}=\frac{-\frac{45}{4}}{d}$

d. $\sqrt{x+\frac{1}{4}}-0{,}5=1$

e. $\sqrt[3]{x-\frac{8}{9}x}=\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

f. $(x+2)^3-x^3=6x^2$

Inecuaciones

Resolviendo inecuaciones

- Una **inecuación** es una desigualdad en la que figura, por lo menos, una incógnita representada por una letra. O sea, es como una ecuación en la que hay, en vez de un signo igual, uno de estos símbolos: < (menor), > (mayor), ≤ (menor o igual), ≥ (mayor o igual).

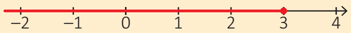
  Resolver una inecuación significa hallar el o los valores de la incógnita que la verifican.

  Para resolver una inecuación, se debe tener en cuenta lo siguiente:

  a) Si se suma o resta el mismo número en ambos miembros, la desigualdad se mantiene. Lo mismo ocurre si se multiplica o se divide, en ambos miembros, por un mismo número **positivo**.

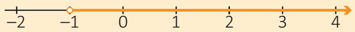
  b) Si se multiplica o se divide en ambos miembros por un mismo número **negativo**, se invierte el sentido de la desigualdad.

$2a + 1 \leq 7$
$2a + 1 - 1 \leq 7 - 1$
$2a \leq 6$
$2a : 2 \leq 6 : 2$
$a \leq 3$



En la recta, el punto "lleno" en 3 indica que está incluido en la solución.

$-2b + 3 < 5$
$-2b + 3 - 3 < 5 - 3$
$-2b < 2$
$-2b : (-2) > 2 : (-2)$
$b > -1$



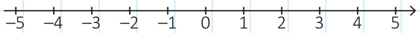
El punto en –1 está "vacío" porque no está en la solución.

45. Completá el cuadro.

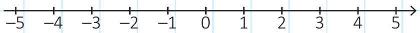
Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Todos los números mayores que –4.	
	$x \leq 5$
Todos los números mayores que –2 y menores o iguales que 3.	
	$5 \leq x < 7$
	$x > -3$

46. Representá en la recta numérica.

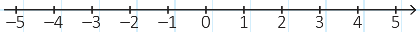
a. $a \geq 2$



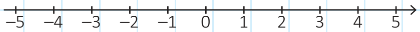
c. $-1 < c \leq 2$



b. $x > 0$



d. $-4 \leq m < -1$

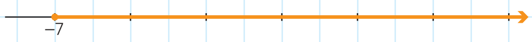


Fijate bien

$-1 < x < 2$ representa todos los números mayores que – 1 y menores que 2.

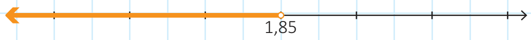
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

47. Indicá las desigualdades representadas en cada recta.

a. 

b. 

c. 

d. 

48. Resolvé las siguientes inecuaciones y representá cada solución en la recta numérica.

a. $4x + 1 \leq 2$

b. $-3y - 4 > 1$

c. $3(x - 2) < x + 1$

d. $5x - \frac{1}{2} \geq 3x + \frac{3}{2}$

e. $-2x \leq \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}}$

f. $-3(x + 1) \geq -x - 6$

49. Escribí una inecuación cuya solución sea $x \geq -\frac{1}{2}$.

50. Expresá como producto las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $16a^2 - 49$ **b.** $25 - 144x^{18}$

51. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a. $9 - 16j^2 = (3 + 4j)(3 - 4j)$

b. $-121a^4 + 36 = (11a^2 + 6)(11a^2 - 6)$

c. $-100 + 36r^2 = (-10 + 6r)(10 + 6r)$

52. Desarrollá los siguientes cuadrados.

a. $(3f - 5)^2$ **b.** $(2a^2 - 3a)^2$

53. Completá los términos faltantes.

a. $(p^2 - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 6p^2 + \ldots\ldots$

b. $(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 4y^4 + y^8$

54. Desarrollá los siguientes cubos.

a. $(2 + 7m^3)^3$ **b.** $(2n^2 - 3n^5)^3$

55. **Estrategia: empezar por el final** Completá los términos faltantes.

a. $(\ldots\ldots + t^2)^3 = 125 \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $(\ldots\ldots\ldots\ldots)^3 = 8x^6 \ldots\ldots\ldots\ldots - 27$

56. Resolvé las ecuaciones y verificá las soluciones.

a. $3x + 8 + 2x = -6 + x + 1$

b. $5(4x - 2) + 15 = 3(6x - 5) + 5$

c. $\sqrt[3]{2x - 1} + 2 = \frac{1}{3}$

d. $\frac{\frac{1}{2}}{4x + 1} = \frac{0,\hat{3}}{2x - 3}$

e. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$

57. Planteá la ecuación que representa cada situación y resolvela. Después verificá la o las soluciones obtenidas.

a. La diferencia entre la tercera parte del siguiente de un número y el propio número da como resultado la raíz cúbica de un octavo.

b. La diferencia entre el cuadrado de un número y el cuadrado de tres coincide con la diferencia entre la quinta potencia de dos y cinco.

c. El cuadrado del anterior de un número es igual a la diferencia entre treinta y siete y el doble de dicho número.

d. La razón entre el siguiente y el anterior de un número es igual a dos quintos.

58. ¿Quién tiene razón?

Mae: La ecuación $x^2 - 1 = -5$ tiene una solución.

Lauti: No, tiene dos.

Carla: Nada que ver. Esa ecuación no tiene solución.

59. Resolvé las inecuaciones y representá la solución en la recta numérica.

a. $3x + \frac{1}{2} \leq x - \frac{3}{4}$

b. $-4x + \frac{1}{3} > 1,\hat{2}$

c. $\frac{-2x - 3}{3} \leq \frac{-0,\hat{7}}{\frac{5}{3}}$

60. Sin resolver la inecuación, señalá cuál es su solución. Explicá cómo te diste cuenta.

$$0,\hat{7}x - 3 < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

a. $x > 9$ **c.** $x < 9$

b. $x < 1$ **d.** $x > 1$

61. **Estrategia: empezar por el final** Completá la inecuación para que su solución sea la indicada.

$3x - 1 \leq \ldots\ldots \rightarrow x \leq 7$

62. Ale dice que "el anterior del cubo de un número" y "el cubo del anterior de un número" significan lo mismo. ¿Tiene razón? Si pensás que sí, mostralo con un ejemplo, y si está equivocado, explicá cuál es la diferencia entre una expresión y la otra.

63. ¿Cómo son todos los números enteros que pueden escribirse de cada una de estas formas?

a. $2n$

b. $2n + 1$

64. Hallá el valor numérico de las siguientes expresiones para $a = \frac{1}{3}$ y para $a = -2$.

a. $a^2 - \frac{3}{2}a^4 + 1$

b. $a^3 - \frac{2}{5}a$

65. Resolvé estas sumas y restas.

a. $-2x - (-3x + 4) - \frac{1}{2}x - \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}\right)$

b. $-3y^2 + \frac{2}{5}y^2 - (5y^2 + 3y^2) - 1$

c. $-\frac{2}{5}m^2 - \left(5 - \frac{3}{2}m^3\right) - \left(-\frac{2}{3}m^2 - m^3\right)$

66. Resolvé las siguientes operaciones.

a. $(4m^4 \cdot 3m^7) : \left(\frac{1}{2}m^2\right)$

b. $\left(3m^5 \cdot \frac{1}{4}m^6\right) : \left(\frac{3}{5}m^2\right)$

c. $\left(6s^8 : \frac{3}{2}s^8\right) \cdot \left(\frac{4}{3}s\right)$

67. ¿Cuál o cuáles de estos cálculos combinados da como resultado $\frac{1}{3}f^4$?

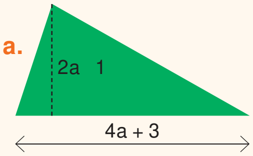
a. $f^4 \cdot f - \frac{2}{3}f^4$

b. $(f^3 \cdot f^6) : (f^5) - \frac{2}{3}f^4$

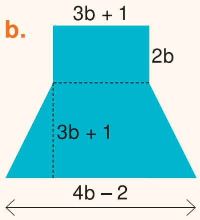
c. $\left(\frac{3}{7}f^4 \cdot \frac{7}{4}f^4 + 0,\widehat{1}f^8\right) : \left(\frac{31}{12}f^4\right)$

68. Escribí de la forma más sencilla el área de estas figuras.

a.



b.



69. Expresá como producto a partir de la extracción de un factor común.

a. $-16a^4 + 8a^2 - 4a^8$

b. $-\frac{25}{9}b^5 + \frac{125}{3}b^7 - \frac{25}{18}b^4$

c. $-0,\widehat{2}x^7 - \left(\frac{9}{5}\right)^{-1}x^5 + 0,\widehat{1}x$

70. **Estrategia: empezar por el final** Completá para que de un lado del igual se obtengan diferencias de cuadrados.

a. .... – .... $= \left(\frac{6}{5}a^4 + \text{..........}\right)\left(\text{..........} - \frac{1}{2}\right)$

b. $\frac{4}{9}$ – .... $= (\text{..........} + \text{..........})(\text{..........} - z^5)$

71. Desarrollá las siguientes potencias.

a. $(-3 + x^2)^2$

b. $\left(-\frac{2}{5}y - \frac{3}{4}y^8\right)^2$

c. $(-2 + z^5)^3$

d. $\left(-\frac{1}{3}w^5 - \frac{2}{3}w^7\right)^3$

72. **Estrategia: descomponer en dos potencias más fáciles**

Desarrollá.

$(a + 1)^4$

73. Encontrá los términos pedidos.

a. El segundo término del desarrollo de

$$\left(-\frac{5}{2}a^2+a^3\right)^2$$

b. El tercer término del desarrollo de

$$\left(-2a^5-\frac{5}{3}a^3w^0\right)^2$$

c. El tercer término del desarrollo de

$$\left(-\frac{5}{2}x^3-\frac{2}{3}x^4\right)^3$$

74. Resolvé las siguientes ecuaciones y verificá las soluciones obtenidas. ¿Alguna no tiene solución?

a. $2\left(a-\frac{1}{4}\right)+0,\hat{6}=2^{-1}$

b. $\left(b-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=4b-\frac{1}{2}$

c. $-\frac{5}{3}\left(2c-0,\hat{3}\right)+2=-\frac{7}{6}\left(2c-2\right)$

d. $\frac{2d-4}{0,\hat{3}}=\frac{-3d+0,5}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$

e. $\frac{2e^2-0,\hat{6}}{5}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}(-40)^{-1}$

f. $\sqrt[3]{0,\hat{5}f-2}+\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-1}}=\frac{1}{3}$

75. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a. Si en una ecuación el segundo miembro se obtiene aplicando la propiedad distributiva al primero, por ejemplo $-3(x+1)=-3x-3$, entonces la ecuación admite infinitas soluciones.

b. Si en el último paso de la resolución de una ecuación queda la incógnita en el primer miembro y la raíz cuadrada de un número en el segundo, entonces la ecuación admite dos soluciones.

76. Escribí una ecuación que cumpla lo pedido en cada caso. Explicá cómo lo pensaste.

a. Que la solución sea $x=-6$.

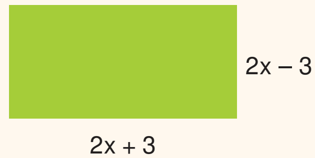
b. Que las soluciones sean $x=3$ y $x=-3$.

c. Que tenga infinitas soluciones.

d. Que no tenga solución.

77. Traducí a lenguaje simbólico y resolvé las siguientes situaciones.

a. El área del rectángulo representado es 27 m². ¿Cuál es su perímetro?



b. ¿Cuáles son los números cuyo cuadrado es igual al producto entre el inverso de veintitrés quinceavos y noventa y dos ciento treintaicincoavos?

78. Para convertir a grados Fahrenheit una medida de temperatura escrita en grados centígrados, se utiliza la expresión:

$$T_F=\frac{9}{5}T_C+32$$

(donde TC es la temperatura en grados centígrados y TF, en grados Fahrenheit).

a. Obtené la fórmula para convertir de grados Fahrenheit a grados centígrados.

b. Convertí 140 °F a grados centígrados.

c. Convertí 32 °F a grados centígrados.

79. Resolvé cada inecuación y representá su solución.

a. $\frac{2}{5}\geq\frac{3}{4}x$

b. $-3x+1\geq 0,\hat{5}$

c. $-\frac{2}{5}>6x-2$

d. $-\frac{3}{4}\leq-\frac{2}{5}x-3$

80. Mirá lo que dicen Sole y Euge. Mostrá un ejemplo de cada una.

Encontré una ecuación sin solución.
Sole

Y yo encontré una inecuación que tampoco tiene solución.
Euge

Saquen una hoja

AUTOEVALUACIÓN

Marcá la opción correcta.

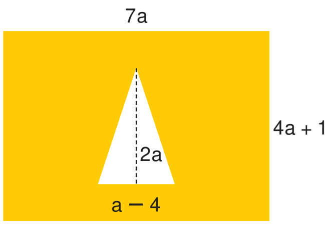
1. "El opuesto del siguiente de un número", en lenguaje simbólico, se escribe:

- ☐ $-a+1$
- ☐ $-(a+1)$
- ☐ $-(a-1)$
- ☐ $a-1$

2. La expresión $-3w^5-\left(5ww^4-4w^2\frac{1}{5}w\right)$ equivale a:

- ☐ $-3w^5-5w^4+\frac{4}{5}w^2$
- ☐ $-3w^5-5w^4-\frac{4}{5}w^2$
- ☐ $-8w^5-\frac{4}{5}w$
- ☐ $-8w^5+\frac{4}{5}w^3$

3. Indicá cuál es el área de la figura coloreada.



- ☐ $27a^2+3a$
- ☐ $29a^2+3a$
- ☐ $27a^2+11a$
- ☐ $29a^2-11a$

4. Indicá a qué diferencia de cuadrados equivale este producto.

$$\left(2f^2+1\right)\left(2f^2-1\right)$$

- ☐ $2f^4-1$
- ☐ $4f^4-1$
- ☐ $4f^2-1$
- ☐ $4f^4-2$

5. ¿Cuál es el desarrollo de $\left(-4d^5-3d^2\right)^2$?

- ☐ $16d^{25}+24d^7+9d^2$
- ☐ $16d^{10}-24d^7+9d^4$
- ☐ $16d^{10}-24d^7-9d^4$
- ☐ $16d^{10}+24d^7+9d^4$

6. La ecuación $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}\left(-\frac{145}{12}+8x\right)$...

- ☐ ...tiene dos soluciones, $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$.
- ☐ ...tiene una única solución, $\frac{3}{2}$.
- ☐ ...tiene una única solución, $\frac{19}{2}$.
- ☐ ...no tiene solución.

7. La cuarta parte del anterior de un número es igual a menos un quinto. ¿De qué número se trata?

- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☐ $-\frac{1}{5}$
- ☐ $\frac{9}{5}$
- ☐ $\frac{19}{20}$

8. ¿Cuál es la solución de $\frac{-7x+8}{3}\leq 2$?

- ☐ $\left(\frac{2}{7};\infty\right)$
- ☐ $\left(-\infty;\frac{2}{7}\right)$
- ☐ $\left[\frac{2}{7};\infty\right)$
- ☐ $\left(-\infty;\frac{2}{7}\right]$

Controlá tus respuestas en las páginas 159 y 160.

Esto ya lo sabía...

1. Trabajá con estos números.

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

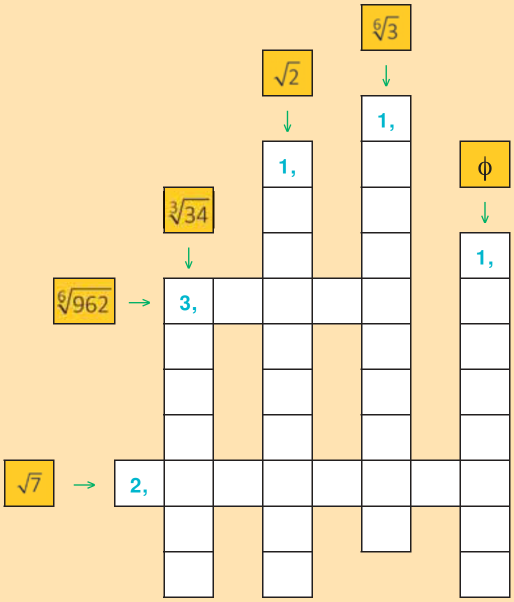
a. Utilizá una calculadora para obtener el valor aproximado de cada número.

b. Tené en cuenta los valores que obtuviste y calculá mentalmente.

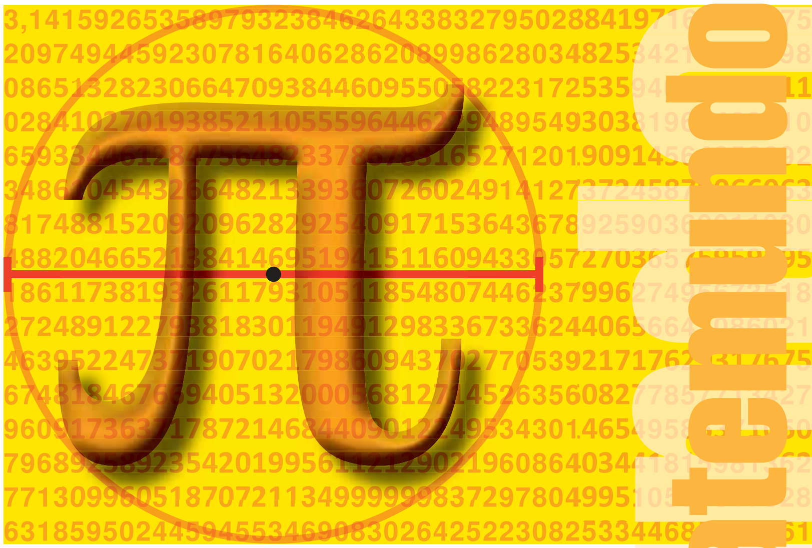
$\phi_1 - \phi_2 =$

$\frac{\phi_1}{\phi_2} =$

2. Completá con los primeros decimales. Podés usar la calculadora. ($\phi = \phi_1$ de la actividad anterior).



Matemundo



Los números irracionales, ya conocidos por los integrantes de la escuela pitagórica (siglo V a.C.), fueron ocultados durante muchos años. Recién en el siglo III a.C. Euclides, en su libro *Elementos*, se refirió a ellos llamando *symmetros* (con medida) a los números racionales y *asymmetros* (sin medida) a los irracionales, palabras que fueron traducidas al latín como *commensurabilis* (conmensurable) e *incommensurabilis* (inconmensurable) por el filósofo Anicio Boecio durante el siglo VI d.C.

Pasó el tiempo y, lejos de ser olvidados, algunos números irracionales hoy hasta tienen club de fans. Por ejemplo, todos los años se conmemora el número pi (3,14...) cada 14 de marzo (por el orden en que se escribe la fecha en Estados Unidos: primero el mes, después el día). Incluso, en algunos lugares del mundo pueden encontrarse monumentos en honor de ese número.

- Buscá en tu calculadora el número π y escribí todos los decimales que se ven en el visor.

  π:

- Investigá un poco más acerca de este número. ¿Cuántos decimales tiene π? ¿Cuántos se conocen actualmente?

Números irracionales

¿Racional o irracional?

- Como se vio en el Capítulo 1, todos los números que pueden expresarse como una fracción son racionales ($\mathbb{Q}$). Entre ellos se encuentran los números naturales ($\mathbb{N}$), por ejemplo, 25, los enteros ($\mathbb{Z}$), como 8 y –8, los decimales exactos y los periódicos, como 3,5 y $1,\widehat{2}$.
  Sin embargo, hay números que no pueden expresarse como fracción y que, en consecuencia, no son racionales. Por eso se los llama **irracionales**.
  Los números π y ϕ son irracionales. También son irracionales las raíces no enteras de números naturales, como $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{5}$, entre otras.
- Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$).

3. Observá los siguientes números y respondé.

0,5 $\qquad$ $0,\widehat{2}$ $\qquad$ 0,123456…

a. ¿Qué regularidad numérica se puede observar en la parte decimal del último número?

b. Escribí por lo menos cinco dígitos más en la parte decimal del número siguiendo la regularidad que encontraste.

0,123456

c. Expresá los números 0,5 y $0,\widehat{2}$ en forma fraccionaria.

0,5 = $\qquad$ $0,\widehat{2} =$

d. ¿Por qué creés que el otro número no se puede expresar como fracción?

4. **Estrategia: buscar regularidades** Entre los siguientes números, tildá los cuatro que son irracionales.

☐ 0,737 $\qquad$ ☐ $154,\widehat{154}$ $\qquad$ ☐ 0,121231234… $\qquad$ ☐ 26,0625

☐ $\sqrt{3}$ $\qquad$ ☐ 23,242526… $\qquad$ ☐ 14,1010010001… $\qquad$ ☐ $12,\widehat{46}$

5. Obtené el valor aproximado de cada raíz cuadrada (escribí todos los decimales que se ven en el visor).

$\sqrt{1} =$ $\qquad$ $\sqrt{4} =$ $\qquad$ $\sqrt{9} =$ $\qquad$ $\sqrt{25} =$

$\sqrt{5} =$ $\qquad$ $\sqrt{8} =$ $\qquad$ $\sqrt{14} =$ $\qquad$ $\sqrt{50} =$

Ahora analizá los resultados obtenidos y escribí tres raíces racionales y tres irracionales.

Racionales → $\qquad$ **Irracionales →**

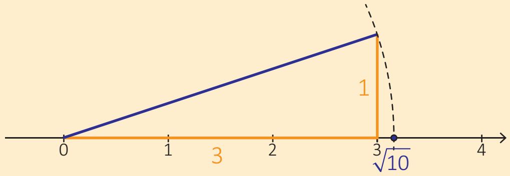
Fijate bien

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Algunas representaciones

En la recta real

- Los números irracionales que provienen de raíces cuadradas pueden ubicarse en la recta con ayuda del teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
  Por ejemplo, para representar el número $\sqrt{10}$ se puede construir un triángulo rectángulo con un cateto de 3 unidades y otro de 1 unidad. Así la hipotenusa se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras:



$H^2 = C_1^{\,2} + C_2^{\,2}$

$H^2 = 3^2 + 1^2$

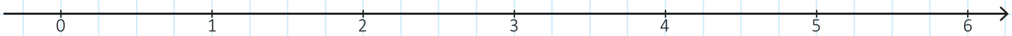
$H^2 = 9 + 1$

$H^2 = 10$

$H = \sqrt{10}$

- Si se ubicasen todos los números reales en la recta, no quedaría ningún punto sin cubrir, es decir, se completaría la recta. Por eso se dice que $\mathbb{R}$ es completo.

6. Ubicá en la recta los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$. En algún caso, usá la raíz cuadrada que ya marcaste.



7. A partir de lo realizado en la actividad anterior, completá con >, < o =.

a. $\sqrt{5}$ .... $2\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ .... $\sqrt{5}$ **c.** $2\sqrt{3}$ .... $3\sqrt{2}$ **d.** $2\sqrt{5}$ .... $3\sqrt{2}$

8. Ubicá estos números irracionales entre los dos números racionales que corresponda. (Podés buscar el valor de *e* en la calculadora).

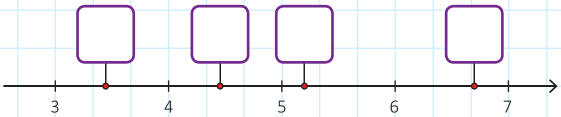
$\sqrt{12}$ $-\pi$ $\sqrt{7}$ $-e$

a. -3 .... -2 **b.** $2{,}6$ .... $2{,}\widehat{6}$ **c.** $-3{,}\widehat{15}$ .... $-3{,}\widehat{13}$ **d.** $\frac{10}{3}$ .... $\frac{11}{3}$

9. ¿Creés que puede haber otro número irracional entre los pares de números racionales de la actividad anterior? Conversalo con tu compañero. Si piensan que sí, mencionen uno en cada caso y si les parece que no, expliquen por qué.

10. Completá el recuadro con la raíz que corresponda. ¡No vale usar la calculadora!

$\sqrt{27}$ $\sqrt{45}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{20}$



Tengo tarea

11. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a. El número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ está a la izquierda de $\sqrt{2}$ en la recta.

b. El número $\pi \cdot \sqrt{2}$ tiene distinta ubicación que $\sqrt{2} \cdot \pi$ en la recta.

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Sumas y restas

- Para sumar o restar dos términos con los mismos radicales, se puede hacer así:
  $3\sqrt{10}+5\sqrt{10}-2\sqrt{10}=(3+5-2)\sqrt{10}=6\sqrt{10}$

- Algunas veces, dos radicales aparentemente diferentes "esconden" otros dos que son iguales. Por ejemplo, $\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$:
  $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ y $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}\rightarrow$ ambos "esconden" a $\sqrt{2}$.
  Puede decirse que $5\sqrt{2}$ es la forma más simple de expresar $\sqrt{50}$, y que $3\sqrt{2}$ es la forma más simple de expresar $\sqrt{18}$.
  Luego $\sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

- Si los radicales son diferentes (y no "esconden" el mismo radical), la suma o la resta quedan expresadas.
  $\sqrt{10}+\sqrt{7}-\sqrt{3}\rightarrow$ Queda expresada (no se sigue resolviendo).

Productos y cocientes de radicales del mismo índice

- Al multiplicar o dividir dos radicales del mismo índice, se obtiene otro radical del mismo índice, cuyo radicando es el producto o cociente de los radicandos originales.
  $\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}:\sqrt{2}=\sqrt{10\cdot 20:2}=\sqrt{100}=10$

12. Resolvé.

a. $9\sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{10}-4\sqrt{3}=$

e. $10\sqrt{5}+\sqrt{125}=$

b. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9}-4\sqrt[3]{9}=$

f. $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{72}=$

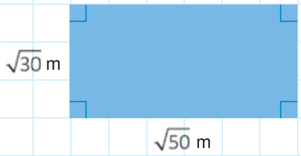
c. $10\sqrt[3]{2}-\left(\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{2}\right)+\sqrt[3]{2}=$

g. $3\sqrt{8}+2\sqrt{18}+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}=$

d. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{32}=$

h. $\sqrt{75}-2\sqrt{12}-7\sqrt{3}+\sqrt{27}=$

13. Calculá el área de este rectángulo. Expresá el resultado de la manera más sencilla posible.



14. El área de un triángulo es $10\sqrt{10}$ y su base mide $2\sqrt{5}$. Calculá su altura.

15. Resolvé estos cálculos combinados y escribí el resultado usando el radical más simple posible.

a. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}=$

c. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{6}:\sqrt[3]{2}=$

b. $\sqrt{540}:\sqrt{3}=$

d. $\sqrt{3^3}:\sqrt{3^5}\cdot\sqrt{3^7}=$

16. Resolvé estos cálculos combinados y escribí el resultado de la forma más simple posible.

a. $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{80}\right)\cdot\sqrt{2}=$

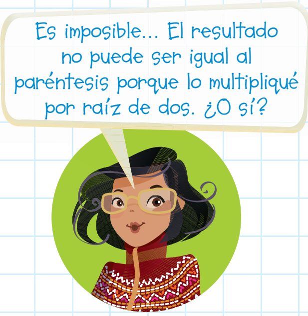
c. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=$

b. $\left(\sqrt{147}+\sqrt{150}-\sqrt{48}+2\sqrt{24}\right):\sqrt{3}=$

d. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2=$

17. **Hacé de profe** Marita resolvió este cálculo, pero duda de su resolución. Corregilo.

$$\left(\sqrt{4}+\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}+\sqrt{16}=\sqrt{8}+\sqrt{4}$$



Tengo tarea

18. Resolvé y expresá el resultado de la forma más simple.

a. $\left(6\sqrt{12}-9\sqrt{2}+3\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$

b. $\left(6\sqrt{12}-9\sqrt{2}+3\sqrt{18}\right):\sqrt{2}$

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

19. Escribí tres números reales (un entero, un decimal exacto y un irracional) que cumplan lo pedido en cada caso.

a. Que sean mayores o iguales que –3 y menores que 4.
b. Que sean mayores que –1 y menores o iguales que 6.
c. Que sean menores que 10.
d. Que sean mayores que 7.
e. Que sean menores que –16.

20. **Estrategia: buscar regularidades** Identificá el patrón de la parte decimal de cada número irracional y escribí las diez cifras decimales que siguen si continúa el mismo patrón.

a. 1,1020304050...
b. 21,10210021...
c. –0,369121518...
d. 98,024681012...

21. Ubicá los números en la tabla. Considerá que cada uno puede estar en más de una casilla.

$0,\widehat{12}$ $\quad -7 \quad 14,09 \quad \sqrt{13} \quad 1 \quad -0,75$

$-\sqrt{27} \quad -1 \quad 0,12 \quad -0,\widehat{75}$

Natural	
Entero	
Decimal finito	
Decimal periódico	
Racional	
Irracional	

22. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a. Un ejemplo de número irracional es 0,001515151515...
b. Un número con infinitas cifras decimales no tiene período.
c. Los números irracionales son aquellos que no se pueden representar como cociente de dos números enteros.
d. Algunos números irracionales son enteros.
e. Todo número irracional es real.

23. Analizá la recta numérica. Luego, indicá si cada relación es verdadera o falsa.



a. $\sqrt{5} < \sqrt{8}$
b. $\sqrt{15} < \sqrt{20}$
c. $\sqrt{8} > \sqrt{15}$
d. $4 > \sqrt{8}$

24. Aplicá la construcción de $\sqrt{10}$ que aparece en este capítulo para ubicar en la recta numérica los siguientes números irracionales usando regla y compás. Explicá tu procedimiento.

$2\sqrt{10} \qquad -\sqrt{10} \qquad \sqrt{10}-1 \qquad \sqrt{10}+1 \qquad \frac{\sqrt{10}}{2}$

25. Resolvé y señalá si el resultado es racional o irracional.

a. $\sqrt{2}-\sqrt{8}$
b. $-2\sqrt{3}+\sqrt{12}$
c. $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$
d. $\sqrt{50}\cdot\sqrt{10}$
e. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2$
f. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{14}\right)^2$

26. **Estrategia: ensayo y error** Evaluá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu respuesta.

a. La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.
b. La suma de un número racional y un número irracional es siempre un número irracional.
c. El producto de dos números irracionales es siempre un número irracional.
d. El producto de dos raíces cuadradas de números naturales iguales y de resultado irracional es un número racional.
e. El cubo de un número irracional puede ser un número racional.

27. Completá con el menor número entero positivo para que el resultado sea racional.

a. $\sqrt{12}-2\sqrt{\ldots\ldots}$
b. $-3\sqrt{24}+6\sqrt{\ldots\ldots}$
c. $\sqrt{27}\cdot\sqrt{\ldots\ldots}$
d. $\sqrt{490}\cdot\sqrt{\ldots\ldots}$
e. $\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{\ldots\ldots}}$
f. $\dfrac{\left(\sqrt{27}+\sqrt{27}\right)}{\sqrt{\ldots\ldots}}$

Aproximaciones

Redondeo y truncamiento

- **Aproximar** un número irracional es representar su valor a través de un racional lo suficientemente cercano.
  También pueden aproximarse números racionales a partir de otros con menos cifras decimales.
  Si al aproximar un número el valor obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

- Una aproximación se puede hacer por **redondeo** a una determinada cifra decimal o por **truncamiento** de ella.
  Al aproximar $\pi = 3{,}14159\ldots$ a los centésimos, se obtiene:
  ✓ por redondeo 3,14 → porque la cifra decimal de la derecha es menor que 5;
  ✓ por truncamiento 3,14 → porque se eliminan todas las cifras de la derecha.
  Y si se aproxima $\pi = 3{,}14159\ldots$ a los milésimos, se obtiene:
  ✓ por redondeo 3,142 → porque la cifra decimal de la derecha es mayor o igual a 5;
  ✓ por truncamiento 3,141 → porque se eliminan todas las cifras de la derecha.
  De las anteriores, solo 3,142 es una aproximación por exceso porque es el único valor mayor que π, mientras que las restantes son por defecto. Además, esa es la mejor aproximación porque es la más cercana a pi.

28. Utilizá el redondeo para completar el cuadro.

Número	Aproximación por redondeo		
	A los décimos	A los centésimos	A los milésimos
453,2730425			
$0,\overset{\frown}{5}$			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{19}$			
$25,\overset{\frown}{09}$			
$\sqrt{30}$			

29. Utilizá el truncamiento para completar el cuadro.

Número	Aproximación por truncamiento		
	A los décimos	A los centésimos	A los milésimos
453,2730425			
$0,\overset{\frown}{5}$			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{19}$			
$25,\overset{\frown}{09}$			
$\sqrt{30}$			

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

30. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los cuadros anteriores; después respondé.

a. ¿Qué tiene que pasar para que al redondear, por ejemplo, a los décimos, se obtengan aproximaciones por defecto?

b. ¿Al truncar pueden obtenerse aproximaciones por exceso? ¿Por qué?

c. ¿En qué casos las aproximaciones por redondeo y por truncamiento son iguales?

31. Del mismo modo que ϕ es conocido como el número de oro, también existen el número de plata (δ_{Ag}) y el número de bronce (δ_{Br}), que suelen usarse en diseño, escultura y pintura.

a. Utilizá una calculadora para determinar una aproximación por redondeo a los décimos de cada número. Luego, ubicalas en la recta numérica.

Número de oro: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Número de plata: $\delta_{Ag} = \sqrt{2}+1$ Número de bronce: $\delta_{Br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$



b. Indicá si ϕ, δ_{Ag} y δ_{Br} estarán a la derecha o a la izquierda de sus respectivas aproximaciones y explicá cómo te das cuenta.

32. Mía quería aproximar algunas raíces no exactas, pero no tenía calculadora. Entonces, hizo así:

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{5} < 3$

Quiero aproximar $\sqrt{5}$. Entonces, la encierro entre dos raíces enteras consecutivas... ¡Listo! $\sqrt{5}$ está entre 2 y 3.



Hacé como Mía y escribí entre qué números enteros consecutivos están estas raíces.

a. .... $< \sqrt{15} <$ ....

b. .... $< \sqrt{28} <$ ....

c. .... $< \sqrt{76} <$ ....

d. .... $< \sqrt{110} <$ ....

33. Sol aproximó por redondeo a los centésimos algunas raíces cuadradas no exactas de números naturales. ¿Qué raíz tenía en cada caso?

a. 2,45 →

b. 3,32 →

c. 3,87 →

d. 4,58 →

e. 3,74 →

f. 5,10 →

Tengo tarea

34. ¿Cómo funciona tu calcu?

a. Encontrá la expresión decimal de $\frac{11}{3}$. ¿Se obtiene un decimal exacto o periódico? ¿Por qué?

b. ¿Tu calcu redondea o trunca los resultados? ¿Y las de tus compañeros? ¿Cómo te das cuenta?

Intervalos reales

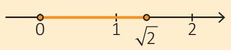
Entre dos números

- Para referirse a todos los números reales que están entre otros dos, se usan los **intervalos**.
  Si se quiere incluir a esos dos números, se usan intervalos **cerrados**, y si no, intervalos **abiertos**.
  $\left[0; \sqrt{2}\right]$ es un intervalo cerrado que contiene el 0, la $\sqrt{2}$ y todos los números que están entre ambos.
  $\left(0; \sqrt{2}\right)$ es un intervalo abierto que contiene todos los números que están entre 0 y $\sqrt{2}$, pero ninguno de estos dos.

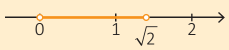
- También hay intervalos que contienen solo uno de los extremos (no son abiertos ni cerrados).
  $\left[0; \sqrt{2}\right)$ contiene el 0, pero no la $\sqrt{2}$, y $\left(0; \sqrt{2}\right]$ contiene la $\sqrt{2}$, pero no contiene el 0 (ambos intervalos contienen todos los números que están entre 0 y $\sqrt{2}$).

- Intervalos, inecuaciones y representación en la recta:

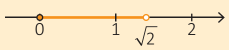
$\left[0; \sqrt{2}\right] \rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}$



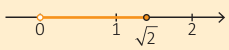
$\left(0; \sqrt{2}\right) \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}$



$\left[0; \sqrt{2}\right) \rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$



$\left(0; \sqrt{2}\right] \rightarrow 0 < x \leq \sqrt{2}$



Desde o hasta...

- También se usan intervalos para mencionar a todos los números reales más grandes o más chicos que un determinado valor. En estos casos, se usa el símbolo del infinito para indicar que el intervalo no tiene uno de los extremos.
  $[-1; \infty)$ contiene el -1 y todos los números mayores que él, mientras que $(-1; \infty)$ contiene solo los números mayores que -1.
  $(-\infty; -1]$ contiene el -1 y todos los números menores que él, mientras que $(-\infty; -1)$ no contiene -1, sino solo los números menores que él.

- Intervalos, inecuaciones y representación en la recta:

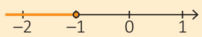
$[-1; \infty) \rightarrow x \geq -1$



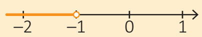
$(-1; \infty) \rightarrow x > -1$



$(-\infty; -1] \rightarrow x \leq -1$



$(-\infty; -1) \rightarrow x < -1$



35. Male, Juani y Vicky le comentan lo que aprendieron a Manu, que está enfermo. ¿A qué intervalo se refiere cada uno?



Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

36. Expresá los siguientes intervalos a partir de inecuaciones y representalos.

a. $(-1; 0) \rightarrow$

b. $[-8; -7) \rightarrow$

c. $(-\infty; 0) \rightarrow$

d. $[10; \infty) \rightarrow$

e. $[1; 9] \rightarrow$

f. $(0,5; \infty) \rightarrow$

37. **Estrategia: pensar primero en lenguaje cotidiano** Expresá estas inecuaciones como intervalos.

a. $x \geq 5 \rightarrow$

b. $-1,5 \leq x < 3 \rightarrow$

c. $x < -9 \rightarrow$

d. $0 \leq x \leq 10 \rightarrow$

e. $-5 < x < -4 \rightarrow$

f. $x \leq 15 \rightarrow$

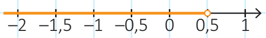
38. Completá la tabla.

	Intervalo	Inecuación
Todos los números reales positivos		
Todos los números reales negativos		
Todos los números reales no negativos		
Todos los números reales		

Fijate bien

No es lo mismo decir que un número es positivo que decir que no es negativo.

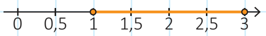
39. Expresá a partir de inecuaciones e intervalos.

a. 

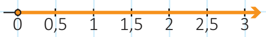
$\rightarrow$ $\rightarrow$

b. 

$\rightarrow$ $\rightarrow$

c. 

$\rightarrow$ $\rightarrow$

d. 

$\rightarrow$ $\rightarrow$

40. **Hacé de profe** Tres compañeros discutían mirando los intervalos representados en la actividad anterior. ¿Quién o quiénes tienen razón?

Maru: –¿Vieron? Todos los intervalos tienen el 0.

Mati: –No, casi todos, porque en el tercero no está el cero, pero en los restantes sí.

Milu: –No, en el último tampoco está, así que solo está en los dos primeros.

Tengo tarea

41. Escribí un intervalo que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Que no contenga el 0.

b. Que contenga al menos dos números enteros.

c. Que no contenga números enteros.

42. Sofía le encargó a un carpintero la fabricación de una mesa circular de 5 m de perímetro.

a. Indicá el valor exacto del diámetro de la mesa que quiere Sofía. Recordá que la longitud de la circunferencia se calcula multiplicando el diámetro por π.

b. ¿Cuántos decimales creés que tiene que usar el carpintero para fabricar una mesa como la que encargó Sofía? ¿Por qué?

43. Escribí un número racional y otro irracional cuyas aproximaciones por redondeo a los diezmilésimos sean 3,1416 y a los milésimos, 3,142. ¿Los números que escribiste son únicos? Justificá tu respuesta.

44. Aproximá por truncamiento y redondeo el valor de $\sqrt{3}$ a los diezmilésimos y a los cienmilésimos. Luego, determiná qué aproximación es mejor en cada caso.

45. Redondeá cada número a los centésimos y después resolvé.

a. $2\pi+\frac{5}{8}-\sqrt{3}-\frac{215}{99}$

b. $-\left[-\left(1{,}5+\sqrt{2}-3\right)+\ 8{,}3-\frac{5}{6}\right]+\pi$

46. Resolvé los cálculos anteriores ingresándolos completos en la calculadora y después redondeá el resultado a los centésimos. ¿Obtuviste los mismos resultados que antes? Explicá tu respuesta.

47. ¿Cuál de estos números racionales es una buena aproximación para $\sqrt[3]{39}$?

4,56 3,39 5,39 6,56

48. Representá cada intervalo y escribí la inecuación correspondiente.

a. $\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$

b. $[1{,}5;\ \pi]$

c. $(2\pi;\ \infty)$

d. $[2\pi;\ \infty)$

e. $(-\infty;\ -\pi]$

f. $(-2;\ -1{,}5]$

49. ¿Alguno de los intervalos de la actividad anterior no contiene números enteros? ¿Cómo te das cuenta?

50. Escribí el intervalo que corresponde a cada inecuación y representalo.

a. $x\leq-\sqrt{7}$

b. $-9\leq x\leq-\frac{9}{2}$

c. $x<3{,}15$

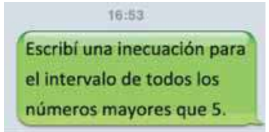
d. $\sqrt{5}\leq x<5$

e. $x\geq-\frac{3}{4}$

f. $0<x<\pi$

51. ¿Cuál o cuáles de los intervalos de la actividad anterior contienen el número π? ¿Cómo te das cuenta?

52. Laura le pasó la tarea a cuatro de sus compañeros porque estuvieron ausentes en la clase de hoy. A todos les mandó el mismo mensaje:



Mirá lo que escribieron sus compañeros y corregilos. ¿Cómo te das cuenta de si están bien o no?

Flor. $x\geq5$

Beto. $x>5$

Sol. $5<x$

Fito. $x<5$

53. Analizá si hay números enteros en cada uno de estos intervalos y respondé. Explicá tus respuestas.

$(-0{,}1;\ 0{,}1]$ $[-3;\ \infty)$ $[-\pi;\ -3]$ $(-2;\ 0{,}1)$ $(-2;\ -1)$

a. ¿Hay algún intervalo que contenga solo un número entero? Si hay, indicá cuál o cuáles.

b. ¿Cuál o cuáles no incluyen números enteros?

c. ¿Hay algún intervalo que contenga infinitos números enteros? ¿Y que contenga más de uno, pero no infintos? En cualquiera de los dos casos, si hay más de uno, mostrá cuáles son.

d. ¿Hay algún intervalo que no contenga números racionales? ¿En todos hay irracionales?

54. Escribí un intervalo que cumpla lo pedido en cada caso. Compará tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Son iguales?

a. Que contenga solo números positivos.

b. Que no contenga números negativos, pero que no todos sean positivos.

c. Que contenga al 3 y a su opuesto, pero no al 4 ni a su opuesto.

55. Considerá las raíces cuadradas de los números naturales desde 1 hasta 20. ¿Cuáles son números racionales y cuáles, irracionales?

56. Mirá cómo hizo Guille para resolver este cálculo.

$$\sqrt{8,\hat{4}+0,\hat{5}}=\sqrt{8,\hat{9}}=\frac{\sqrt{89-8}}{9}=\frac{\sqrt{81}}{9}=\frac{9}{9}=1$$

Mile y Lauti discuten acerca de esta resolución.

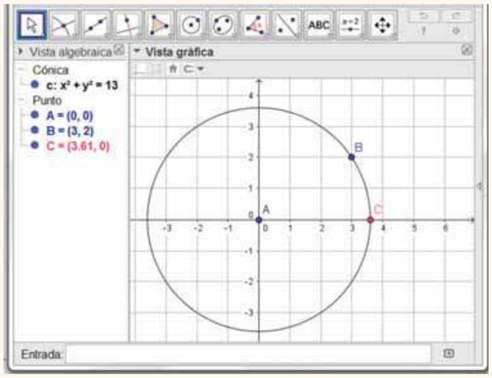
Está mal, porque tiene que dar irracional. — **Mile**

No. Guille se equivocó, pero el resultado no es irracional. — **Lauti**

¿Es cierto que Guille se equivocó? Si es así, ¿cuál es su error? ¿Y quién tiene razón, Lauti o Mile?

57. Marina usó el GeoGebra para representar un número irracional en la recta numérica (eje x):

- Marcó los puntos (0, 0) y (3, 2).
- Dibujó una circunferencia de centro (0, 0) que pasa por el (3, 2).
- Por último, marcó una intersección entre la circunferencia y el eje x.



a. ¿Qué número irracional representó? (corresponde a la coordenada x del punto C)

b. Observá la coordenada x del punto C en la lista, a la izquierda del gráfico. ¿Indica el valor exacto del número representado o es una aproximación?

58. Representá en la recta numérica. Podés usar el GeoGebra o hacerlo en tu carpeta.

$\sqrt{8}$ $\qquad$ $\sqrt{17}$ $\qquad$ $-\sqrt{20}$

59. Efectuá estas operaciones. ¿Los resultados son racionales o irracionales? ¿Por qué pasa eso?

a. $\sqrt{5}+\left(-\sqrt{5}\right)$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$

c. $\left(-\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$

d. $\sqrt{20}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}+\sqrt{35}\cdot\frac{1}{\sqrt{35}}$

60. Resolvé e identificá si el resultado es racional o irracional.

a. $\sqrt{\pi+(-\pi)}$

b. $\sqrt{6,\hat{2}-0,\hat{2}}$

c. $\sqrt{21-7}$

d. $\sqrt{\frac{7}{3}+6,\hat{6}}$

e. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

f. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

61. ¿Cuál de estas expresiones equivale a $\sqrt{12}$? ¡No vale usar la calculadora!

$3\sqrt{2}$ $\qquad$ $4\sqrt{3}$ $\qquad$ $2\sqrt{3}$ $\qquad$ $6\sqrt{2}$

62. ¿Cuál de estas expresiones equivale a $\sqrt[3]{5^5}$? ¡Otra vez sin la calculadora!

25 $\qquad$ $5\sqrt[3]{25}$ $\qquad$ $25\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5}$

63. El volumen de un cubo es 125 m³. ¿Es correcto decir que el área de una de sus caras es equivalente a $\sqrt[3]{125^2}$? ¿Por qué?

64. Resolvé y expresá los resultados de la manera más simple posible.

a. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

b. $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}\right):\sqrt{5}$

c. $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

d. $\left(3\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)$

e. $\sqrt{150}-3\sqrt{24}+\sqrt{6}$

f. $\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{54}$

g. $\left(-2\sqrt{32}+7\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{32}+7\sqrt{72}\right)$

h. $\left(\sqrt{2}+2\right)^2\cdot\sqrt{2}$

i. $\left(3\sqrt{2}+1\right)^2-\left(3\sqrt{2}-1\right)^2$

j. $\left(4\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2-\left(4\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$

65. Ubicá estos radicales en los siguientes cálculos de manera que los resultados sean racionales.

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$

a. $\sqrt{54}\cdot$ ....

b. $\sqrt{75}:$ ....

c. $\sqrt{32}-4$ ....

d. $\sqrt{45}:$ ....

66. Completá la tabla con aproximaciones a los centésimos.

Valor exacto	Aproximación por...	
	redondeo	truncamiento
2π		
$\sqrt{60}$		
$\sqrt[5]{200}$		
$\frac{2}{11}$		
$\frac{1}{\sqrt{2}}$		

67. ¿Es necesario aproximar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $6\sqrt{5}$ cm y $8\sqrt{5}$ cm para expresarla con un número entero? ¿Por qué?

68. Calculá el valor exacto de la altura del rectángulo representado, que tiene un área de 150 cm². ¿Es posible obtener una aproximación a los décimos por exceso? ¿Por qué?



69. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a. El resultado de $\sqrt{12}+4\sqrt{75}-6\sqrt{48}$ redondeado a los centésimos es 3,46.

b. La diferencia entre el redondeo a los décimos de $3\sqrt{2}$ y el redondeo a las unidades de $2\sqrt{3}$ es 1,2.

c. La diferencia entre el redondeo a los centésimos de ϕ (pág. 49) y su redondeo a los décimos es 1.

d. El redondeo a los diezmilésimos de $\sqrt{12}$ es igual a su aproximación a los cienmilésimos.

70. Escribí los intervalos a los que se hace referencia en el siguiente texto.

La OMS (Organización Mundial de la Salud) advierte que la mayoría de la gente ingiere demasiado sodio (entre 9 g y 12 g de sal por día), y aconseja "mantener el consumo de sal por debajo de 5 gramos diarios" para prevenir la hipertensión y otras enfermedades.

71. Expresá como intervalo y representá en la recta numérica.

a. $x \leq -6$

b. $x > \frac{4}{3}$

c. $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{3}$

d. $-\frac{1}{2} < x$

e. $-\frac{3}{4} < x \leq \frac{5}{2}$

f. $x < \frac{4}{5}$

72. Representá estos intervalos en la recta numérica y escribí en cada caso la inecuación correspondiente.

a. $(-\infty; -7]$

b. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

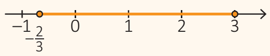
c. $\left(-\frac{8}{5}; \infty\right)$

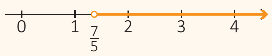
d. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$

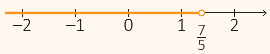
e. $\left[\frac{9}{4}; \frac{5}{2}\right]$

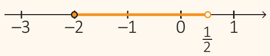
f. $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$

73. Escribí el intervalo y la inecuación correspondiente en cada caso.

a. 

b. 

c. 

d. 

74. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, explicá por qué y si no lo es, mostrá un contraejemplo (es decir, un ejemplo de que no ocurre).

a. Los intervalos abiertos no contienen números enteros.

b. Si uno de los extremos de un intervalo es un número entero, entonces ese intervalo contiene al menos un número entero.

c. Todos los intervalos con extremos de distinto signo contienen al menos un número entero.

d. Los intervalos de extremos con números enteros no contienen racionales ni irracionales.

e. No todos los intervalos cerrados de distintos extremos contienen números racionales.

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Saquen una hoja

AUTOEVALUACIÓN

Marcá la opción correcta.

1. ¿A qué conjunto numérico pertenece el número $\sqrt{77}$?

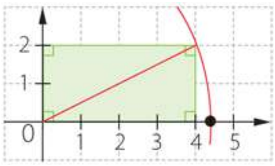
- [ ] Solo al de los números racionales.
- [ ] Solo al de los números enteros.
- [ ] Solo al de los números irracionales.
- [ ] Al de los números irracionales y al de los reales.

2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Todos los números enteros son racionales.
II. Todos los números reales son racionales.
III. Ningún número entero es irracional.

- [ ] Solo I.
- [ ] Solo I y II.
- [ ] Solo III.
- [ ] Solo I y III.

3. ¿Cuál es el número irracional representado en la recta numérica a partir del procedimiento que se muestra en la figura?



- [ ] $\sqrt{4,5}$
- [ ] $\sqrt{6}$
- [ ] $\sqrt{15}$
- [ ] $\sqrt{20}$

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa un número irracional?

- [ ] $\pi - \pi$
- [ ] $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
- [ ] $\sqrt{8} : \sqrt{2}$
- [ ] $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones equivale a $2\sqrt[4]{64} - \sqrt{18}$?

- [ ] $6\sqrt{2}$
- [ ] $\sqrt{2}$
- [ ] $7\sqrt{2}$
- [ ] 2

6. ¿Cuál es el valor aproximado de $e = 2,718281...$ que resulta de truncarlo a los centésimos?

- [ ] 2,70
- [ ] 2,72
- [ ] 2,71
- [ ] 2,73

7. ¿Cuál es el valor aproximado de $\pi = 3,141592...$ que resulta de redondearlo a los milésimos?

- [ ] 3,14
- [ ] 3,1416
- [ ] 3,141
- [ ] 3,142

8. ¿Cuál es el intervalo correspondiente a $-\sqrt{15} < x \leq \sqrt{15}$?

- [ ] $\left[-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right)$
- [ ] $\left(-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right]$
- [ ] $\left(-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right)$
- [ ] $\left[-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right]$

9. ¿Cuál de estos intervalos no contiene números enteros?

- [ ] $\left[-\sqrt{2}; 1\right)$
- [ ] $\left(-\sqrt{2}; 1\right]$
- [ ] $\left(-\sqrt{2}; -1\right)$
- [ ] $\left[-\sqrt{2}; -1\right]$

Controlá tus respuestas en las páginas 159 y 160.

Esto ya lo sabía...

1. Lucas parte del kilómetro cero a las tres de la tarde y viaja a una velocidad media de 80 km/h.

a. ¿Qué distancia recorrió al cabo de dos horas y media de viaje?

b. Escribí una fórmula que te permita calcular la distancia recorrida por Lucas a medida que pasa el tiempo.

c. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 240 km?

d. Si llegó a su destino a las diez y media de la noche, ¿cuántos kilómetros recorrió?

2. El gasto fijo mensual que tiene Lucas para mantener el auto es de $ 1.600; además, por cada kilómetro recorrido gasta $ 1,40 de combustible.

a. Escribí una fórmula que te permita calcular el gasto mensual que tiene Lucas por usar el auto, según los kilómetros recorridos (gasto fijo más costo de combustible).

b. Si solo puede gastar en el auto $ 4.000 por mes, ¿cuántos kilómetros puede recorrer?



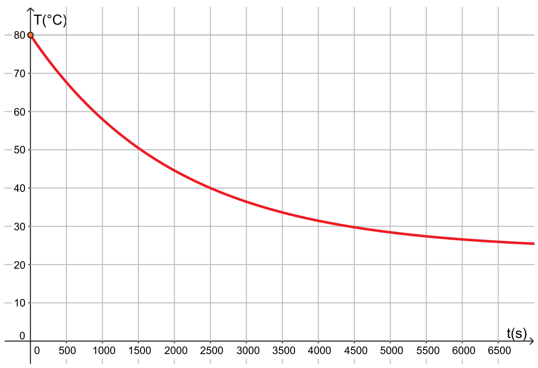
Matemundo

Muchas situaciones se pueden representar a partir de las funciones y sus gráficos.

Las funciones nos cuentan cómo es la relación entre dos magnitudes, y los gráficos nos muestran su comportamiento "de un solo golpe de vista". Por eso son una valiosa fuente de información. Interpretarlos correctamente nos permite ahorrar mucho tiempo, además de facilitar la comunicación de datos.

Mediante gráficos puede representarse, de forma sencilla, cómo disminuye el volumen de tu banda de rock favorita a medida que te alejás del escenario, o cómo se enfría tu leche chocolatada.

Este gráfico muestra cómo varía la temperatura de tu desayuno, que al principio está caliente, si dejás que se enfríe solo.



- ¿Qué temperatura tiene al principio?
- ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó una temperatura de 40 °C?

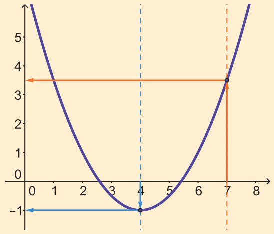
Funciones. Análisis de gráficos

Las funciones desde los gráficos

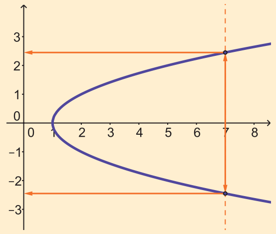
- En una relación se establece un vínculo, por ejemplo, entre las personas. En Matemática, un tipo de relación especial es aquella que vincula dos variables, una **independiente** y otra **dependiente**. Por ejemplo, cuando se dice que el **costo** de algo **depende del consumo**. En este caso, el costo es la **variable dependiente** y el consumo, por ejemplo de la luz, la **variable independiente**.

  Para que una relación sea **función**, a cada valor de la variable independiente (eje horizontal) le debe corresponder **uno y solo un valor** de la variable dependiente (eje vertical).

  Una forma fácil de darse cuenta de si una relación es o no función consiste en mirar su gráfico. Si al trazar rectas verticales estas cortan al gráfico más de una vez, entonces no corresponde a una función.



Es función.

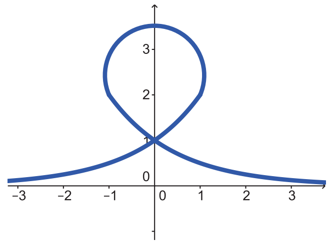


No es función.

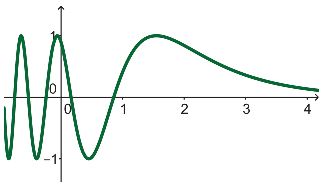
El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente es el **dominio** de la función, y el conjunto de los que toma la variable dependiente, su **imagen**.

3. Indicá si los siguientes gráficos representan funciones. En el caso de que alguno no la represente, explicá cómo te diste cuenta.

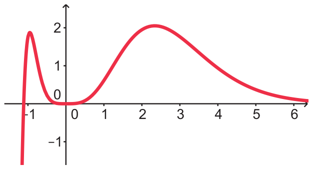
a.



b.



c.



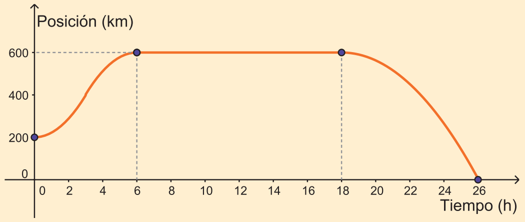
4. Volvé a los gráficos que no representan funciones de la actividad anterior. ¿Es posible modificarlos para que correspondan a funciones? Dibujalo.

5. **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Tomás le dice a Alfredo que puede dibujar una función que corte dos veces el eje **y**, pero Alfredo cree que eso no es posible. ¿Quién tiene razón? Explicá tu respuesta.

Graficando

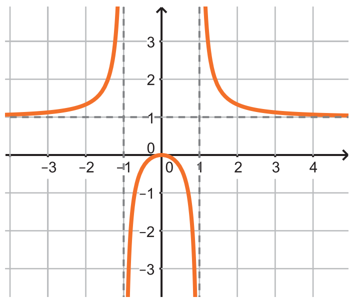
Los gráficos son una herramienta de análisis y síntesis muy importante. A partir de ellos puede "contarse una historia". Por ejemplo, este gráfico cuenta cómo se movió Juan en su moto, "dice" dónde se encontraba respecto del km 0 de la ruta, con el transcurso del tiempo. El eje **x** representa el tiempo y el eje **y**, la posición.

- Durante las primeras seis horas Juan se alejó del punto de partida. Se dice que en este intervalo de tiempo, (0; 6), la función **crece** ya que, a medida que "nos movemos" hacia la derecha sobre el eje **x**, la función toma valores cada vez mayores (Juan está cada vez más lejos).
  En el intervalo de tiempo (6; 18), la función es **constante** porque toma siempre el mismo valor (Juan se tomó un descanso, no se alejó ni se acercó). En el intervalo de tiempo (18; 26), la función **decrece** porque toma valores cada vez más chicos (Juan regresa, acercándose al km 0 de la ruta).



- Lo más lejos que llegó Juan es a 600 km del comienzo de la ruta: se dice que el valor máximo de la función es 600; lo alcanzó a las 6 hs y permaneció allí hasta las 18 hs.
  Si al recorrer el eje **x** de izquierda a derecha la función pasa de un intervalo de crecimiento a uno de decrecimiento, esa función tiene un **máximo**, que puede ser **absoluto**, si es el mayor valor alcanzado, o **relativo**, si hay otros "picos más altos".
  Si sucede al revés, es decir, si se pasa de un intervalo de decrecimiento a uno de crecimiento, la función tiene un **mínimo**, que también puede ser **absoluto** o **relativo**.
- Otros elementos importantes de la función son representados por los puntos en los que el gráfico corta los ejes. El punto en el que la función corta el eje **y** indica la **ordenada al origen**, que es el valor que toma la función cuando **x** vale 0. En este caso, la ordenada al origen es $y = 200$ y representa el lugar de donde partió el motociclista.
  El punto de corte con el eje **x** señala la **raíz** de la función, es decir, el valor que toma **x** cuando **y** es 0. En este caso, la raíz es $x = 26$ y representa el momento en el que el motociclista llegó al km 0.

6. La función representada no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$, es decir, su dominio es $\mathbb{R} - \{1; -1\}$. Mirando el gráfico determiná los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. ¿Esta función tiene algún máximo absoluto? ¿Y relativo?



Fijate bien

La función se aproxima a las rectas marcadas en el gráfico con líneas punteadas, llamadas asíntotas. Las verticales nunca se cortan.

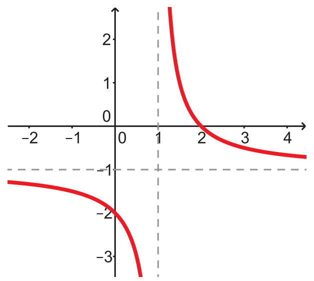
7. **Hacé de profe** Al analizar el gráfico, Julián hizo las siguientes afirmaciones. Corregilas y explicá tus correcciones.

a. La raíz de la función es $y = 2$ y la ordenada al origen es $x = -2$.

b. La función es siempre creciente.

c. El dominio de la función son todos los reales excepto el 1.

d. La imagen de la función son todos los reales.



Función lineal

- Una de las funciones más simples es la **función lineal**, cuyo gráfico es una **recta**.
  La fórmula de la función lineal es: $f(x) = m\,x + b$, donde **m** y **b** son dos números reales cualesquiera.

  ✓ **m** es la **pendiente** de la recta e indica su dirección, es decir, informa acerca de la inclinación de la recta.
  La pendiente también determina si la función es creciente o decreciente: si es positiva, entonces la función es creciente; y si es negativa, la función es decreciente.

  ✓ **b** es la **ordenada al origen**, ya que es el valor que toma la función cuando **x** vale cero. Es decir, si se reemplaza **x** por 0 y se hace la cuenta, se obtiene **b**: $f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$.

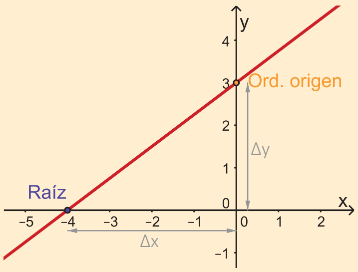
  ✓ Por último, para calcular la **raíz** de la función, se la iguala a 0 y se despeja **x**: $m\,x + b = 0$.

- Un ejemplo puede ser la función $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$. La pendiente es $\frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es 3.
  Para calcular la raíz, se iguala la función a cero:

$$\frac{3}{4}x + 3 = 0$$

$$\frac{3}{4}x = -3$$

$$x = -3 : \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{x = -4}$$



En el gráfico puede verse que la pendiente coincide con el cociente de la diferencia en **y** de dos puntos de la recta, y la diferencia en **x** de esos mismos puntos: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Si se consideran los puntos (0; 3) y (–4; 0), $m = \frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$. Esto puede ser útil si se desconociese la fórmula de la función.

8. Determiná la pendiente, la ordenada al origen y la raíz de cada una de estas funciones, y representalas.

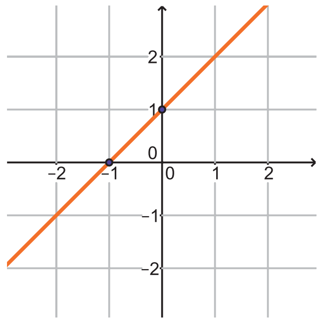
a. $f(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = -x - 2$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

d. $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$

9. La recta representada corresponde a una función lineal.



a. Escribí la fórmula de la función.

b. Encontrá la raíz de manera analítica (es decir, resolviendo la ecuación) y verificá que coincide con el valor que muestra el gráfico.

10. **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Escribí la fórmula de la función lineal que cumple lo pedido en cada caso.

a. Su gráfico pasa por el punto (–5; 7) y tiene ordenada al origen en y = –1.

b. Su gráfico pasa por los puntos (–3; –1) y (4; 6).

Fijate bien

Si se desconoce el valor de **m** y **b** en:

$$y = \mathbf{m}x + \mathbf{b},$$

se obtiene $\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; una vez conocido **m**, puede hallarse **b**, reemplazando las coordenadas de un punto en la fórmula y resolviendo una ecuación: si y = 2x + b pasa por (–2; 1), entonces
1 = 2 · (–2) + b
1 = –4 + b, con lo que b = 5.

11. Mirá las funciones de la actividad anterior.

a. ¿Cuál es la raíz de cada una? ¿Son crecientes o decrecientes?

GG **b.** Representá las funciones ingresando las fórmulas obtenidas desde la barra de entrada y verificá que pasen por los puntos mencionados en la actividad anterior.

12. Dibujá una recta que tenga ordenada al origen 2 y pase por el punto (4; 2).

a. Sin hacer cuentas determiná cuánto vale la pendiente. Explicá cómo te diste cuenta.

b. ¿Tiene raíces? ¿Por qué?

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

13. Dibujá una recta que tenga raíz 2 y pase por el punto (2; 4).

> **Fijate bien**
>
> Recordá que para que un gráfico corresponda a una relación funcional, a cada valor de la variable independiente le debe corresponder uno y solo un valor de la variable dependiente.

a. Carlitos dice que la recta representada es el gráfico de una función lineal. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

b. ¿Puede determinarse el valor de la pendiente? Explicá tu respuesta.

14. Lucas y Matías compiten para ver quién dibuja la recta que crece más rápido. No pueden hacerla vertical y tampoco pueden escribir la fórmula antes de representarla. Lucas dibujó una que pasa por los puntos (1; 1) y (2; 5); en cambio, la de Matías pasa por (2; 4) y (3; 6).
¿Cuál de las dos rectas "crece más rápido"? ¿Cómo podrías darte cuenta sin representarlas?

15. La posición de un móvil está dada por la función P(t) = 20 m + 10 m/s t, donde t es el tiempo medido en segundos.

a. ¿Cuál es la posición del móvil en el instante t = 0 s? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?

b. ¿A qué velocidad se desplaza? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?

c. ¿En qué instante se encuentra en la posición 0 m? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?

> **Fijate bien**
>
> Recordá que el valor de la velocidad equivale a la distancia recorrida en una unidad de tiempo.

d. Hacé un gráfico de la función.

Paralelas y perpendiculares

Rectas en el plano

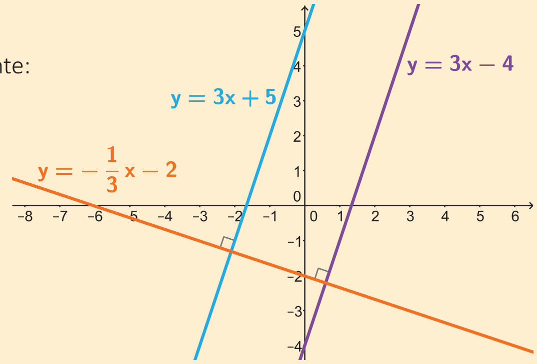
Como se vio anteriormente, la pendiente indica la dirección de la recta, es decir, su inclinación respecto del eje **x**. A partir de la pendiente es posible determinar el ángulo que forman dos rectas entre sí y, en consecuencia, puede establecerse el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas.

- Las rectas **paralelas** tienen la misma inclinación; por lo tanto, sus ecuaciones deben tener la **misma pendiente**.
- Las rectas que no son paralelas son **secantes**, es decir, se cortan en un punto. Entre ellas, las rectas **perpendiculares** forman, al cortarse, ángulos de 90°. Para que esto suceda, sus pendientes tienen que ser **recíprocas y de signo contrario**.
- El gráfico de la derecha muestra dos rectas paralelas: la **celeste** y la **violeta**. Como se puede ver, ambas tienen la misma pendiente:

$$m_1 = m_2 = 3$$

También se puede ver que la recta **anaranjada** es perpendicular a las otras dos y que su pendiente es $-\frac{1}{3}$, es decir:

$$m_3 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{m_1}$$



16. Escribí la ecuación de una recta paralela a $y = 4x - 2$, que pasa por el punto (0; 0). Después escribí la ecuación de otra recta, perpendicular a las anteriores, que también pase por el origen. Por último, representalas en el mismo par de ejes y verificá el paralelismo y la perpendicularidad.

Fijate bien

Tené en cuenta que para "ver" el ángulo recto entre las perpendiculares, los dos ejes deben tener la misma escala.

17. **Hacé de profe** Tomás asegura que la recta R, cuya ecuación es $y = -5x + 2$, es paralela a la que pasa por los puntos (4; –5) y (2; 5). ¿Tiene razón?

18. Volvé a la actividad anterior. Si Tomás tenía razón, escribí la ecuación de la recta perpendicular a R que pasa por el punto (4; –5). Si no tenía razón, escribí la ecuación de la recta paralela a R que pasa por el punto (2; 5). Graficá todas las rectas con las que trabajaste en esta actividad y en la anterior, en el mismo par de ejes.

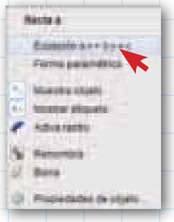
19. Hallá la ordenada al origen de la recta que es paralela a $y = 4x - 1$ y que pasa por el punto (4; 8). Hacé un gráfico para verificar tu respuesta.

20. Graficá la recta que se pide en cada caso.

a. Es perpendicular a la que pasa por (0; 2) y (6; 5), y tiene ordenada al origen 2.

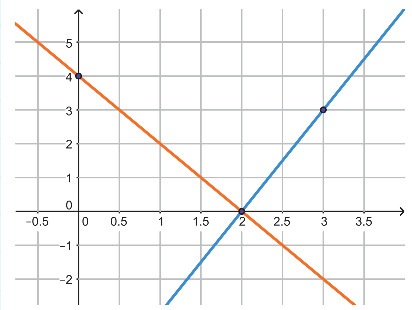
b. Su raíz es $x = 2$ y es perpendicular a la que pasa por (–1; 3) y (4; 3).

21. Representá las rectas de la actividad anterior en tu computadora (acordate de que los puntos se ingresan con coma y no con punto y coma). Mirá en la vista algebraica las ecuaciones de las rectas (si no están escritas en la forma que conocés, hacé clic con el botón derecho del *mouse* y seleccioná la opción que se muestra en la imagen). Compará sus ecuaciones: ¿en qué caso vale el análisis de la pendiente para rectas perpendiculares? ¿Qué ocurre en el otro caso, cómo son esas ecuaciones?



22. Un triángulo rectángulo tiene sus vértices en los puntos A = (0; 3), B = (6; 0) y C = (3; 9). Hacé un gráfico de la situación y coloreá el triángulo. Escribí las ecuaciones de las rectas en las que están contenidos los lados del triángulo y determiná en que vértice se encuentra el ángulo recto.

23. **Hacé de profe** Mirando el gráfico, Ariana se animó a afirmar que las rectas representadas son perpendiculares. ¿Es verdad? ¿Cómo te das cuenta?



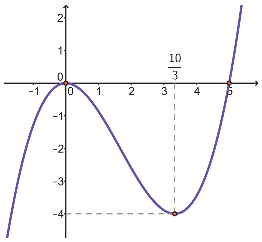
24. Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.

a. Una relación es función si a cada valor de la variable independiente le corresponden dos o más valores de la variable dependiente.

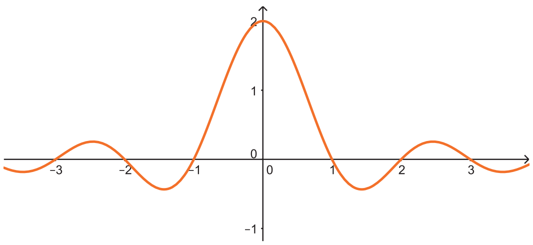
b. Una función que en el intervalo (a; b) crece y decrece en el intervalo (b; c) presenta un mínimo en b.

c. Si a medida que aumentan los valores de x, también aumentan los valores de y, entonces la función es creciente.

25. Señalá los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de esta función. Indicá también las raíces, los máximos y mínimos. ¿Son absolutos o relativos?



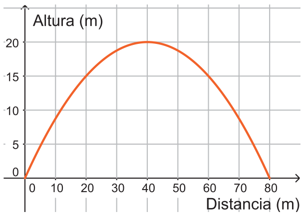
26. Mirá el gráfico y respondé.



a. Indicá la ordenada al origen e identificá cuatro raíces.

b. ¿Cuál es el máximo absoluto? ¿Tiene máximos relativos? ¿Y mínimos?

27. Al realizar un "saque desde el arco", en ciertas condiciones, la trayectoria de la pelota resulta ser una curva como la representada.



a. ¿Cuál es el máximo de la función? ¿Es absoluto? ¿Qué interpretación tiene para la situación propuesta?

b. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra la pelota en la altura máxima?

c. ¿Cuáles son las raíces de la función? ¿Qué interpretación tiene para esta situación?

28. Dibujá una función que decrezca de $(-\infty; -3)$, que crezca de $(-3; +\infty)$, que tenga raíces en $x = -6$ y $x = 5$ y ordenada al origen en $y = -2$.

29. Escribí la fórmula de la función lineal que tiene su raíz en $x = -2$ y ordenada al origen $y = 1$.

30. Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.

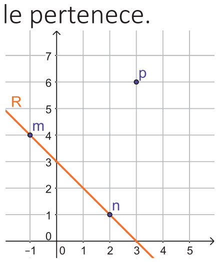
a. Una función lineal cuya pendiente es negativa es una función creciente.

b. Una función lineal de ordenada al origen 4 y raíz $x = 2$ tiene pendiente negativa.

c. Una función lineal de pendiente nula es una función constante.

d. Una recta que pasa por los puntos $(-4; 2)$ y $(4; 4)$ corta al eje vertical en un valor que está entre 2 y 4.

31. En el gráfico se observa la recta R, dos de sus puntos, y un punto que no le pertenece.



a. Escribí la ecuación de la recta que es perpendicular a R y que pasa por el punto **m**.

b. Escribí la ecuación de la recta que es perpendicular a R y que pasa por el punto **n**.

c. Escribí la ecuación de la recta que es paralela a R y que pasa por el punto **p**.

32. **Estrategia: realizar un gráfico de análisis**

Volvé a la actividad anterior.

a. Si representases las rectas pedidas y R, todas en el mismo gráfico, ¿qué figura formarían? ¿Por qué?

b. Encontrá las ecuaciones de las rectas necesarias para que se forme una región triangular de vértices **m**, **n** y **p**.

33. Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.

a. Siempre es posible encontrar más de una recta que sea paralela a una dada y pase por un punto indicado.

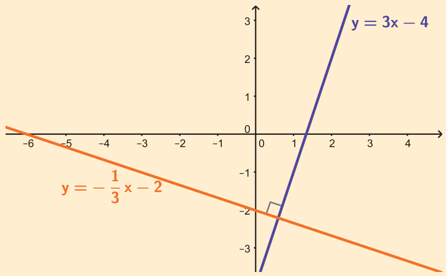
b. Si una recta es perpendicular a una dada, entonces es perpendicular a todas las paralelas a ella.

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Intersección entre dos rectas

- Ya se vio que al representar más de una recta, estas pueden cortarse en un punto, como se observa en las rectas del gráfico, pero en las que, a simple vista, no puede decirse exactamente cuáles son las coordenadas del punto de intersección.
  Sin embargo, esos valores pueden calcularse encontrando la **solución simultánea** a las ecuaciones de ambas rectas. De esta manera, las ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones**:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$



Como la coordenada **y** de ese punto es la misma en ambas rectas, las ecuaciones pueden igualarse, para obtener el valor de **x**.
A este método se lo denomina **igualación**:

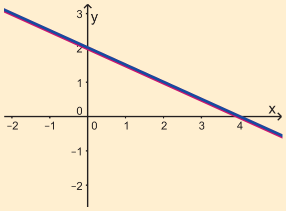
$$-\frac{1}{3}x - 2 = 3x - 4$$
$$-2 + 4 = 3x + \frac{1}{3}x$$
$$2 = \frac{10}{3}x \Rightarrow x = 2 : \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{5}}$$

Para calcular el valor de **y**, solo hay que reemplazar este número en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Por ejemplo, si se reemplaza en la segunda ecuación, se tiene:

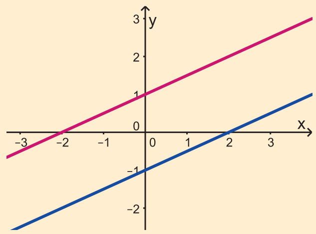
$$y = 3 \cdot \frac{3}{5} - 4 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{11}{5}}$$

Esto significa que el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas tiene una sola solución: $x = \frac{3}{5}$ e $y = -\frac{11}{5}$, que se corresponden con las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.
En este caso, donde hay **una solución única**, se dice que el sistema es **compatible determinado.**

- Al representarse dos rectas, también podrían ocurrir estas situaciones:
  - ✓ Las dos rectas se superponen, coincidiendo todos sus puntos. En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de esas rectas es **compatible indeterminado**, puesto que se pueden encontrar **infinitas soluciones**.



  - ✓ Las dos rectas son paralelas y distintas, por lo que no tienen puntos en común. En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de esas rectas es **incompatible**, puesto que **no tiene solución**.



34. Encontrá la solución de este sistema en forma analítica (haciendo cuentas, usando el método de igualación) y después representá las rectas para verificarla.

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

35. Pedro observó este sistema y comparó las ecuaciones de las rectas; enseguida vio que tienen la misma ordenada al origen. Entonces, sin hacer cuentas, supo la solución. ¿Cuál es?

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

36. **Estrategia: analizar y comparar** Volvé a leer la relación que hay entre las rectas que forman un sistema y su solución. Después completá el cuadro.

Pendientes	Ordenadas al origen	Sistema
Iguales	Distintas	
	Iguales	Compatible indeterminado
Distintas	Distintas	

37. Sin hacer cuentas, clasificá estos sistemas en compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles. Explicá tus respuestas.

a. $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = -2x - 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = \frac{4}{8}x + 5 \\ y = \frac{32}{64}x - 8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = \frac{8}{4}x - \frac{5}{2} \\ y = 2x - \frac{15}{6} \end{cases}$

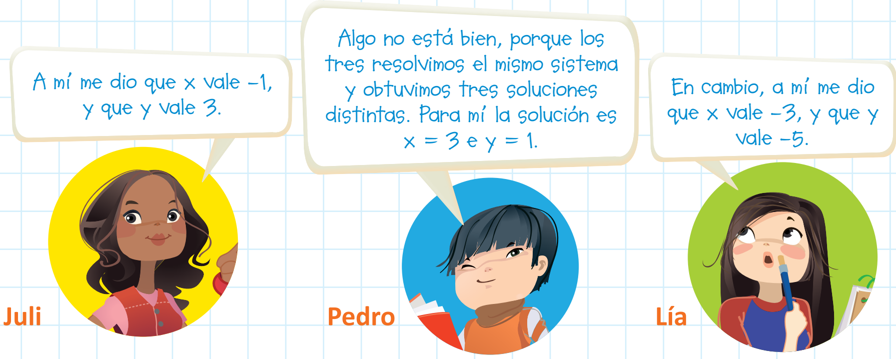
f. $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = -\frac{9}{3}x - 2 \end{cases}$

Fijate bien

Para saber cómo es la solución de un sistema antes de resolverlo, se pueden analizar las pendientes y las ordenadas al origen de las rectas que lo forman, como se hizo en la actividad 36.

38. Hallá en forma analítica la solución de los sistemas compatibles determinados de la actividad anterior.

39. **Hacé de profe** Indicá quién encontró la solución del sistema $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 4x + 7 \end{cases}$. Señalá por qué las otras dos no son soluciones.



40. Malena empezó a resolver este sistema con un método nuevo. Mirá cómo lo hizo y hallá el valor de **y**.

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ → Como $y = 2x - 3$, puedo reemplazar esta expresión en la segunda ecuación.

$2y - x = 3 \Rightarrow 2 \cdot (2x - 3) - x = 3$ → Ahora distribuyo el 2 en el paréntesis...

$\Rightarrow 4x - 6 - x = 3$ → ... y solo me queda resolver la ecuación.

$\Rightarrow 3x - 6 = 3$

$\Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

¡Fantástico! Ya sé que x vale 3. Reemplazo ese valor en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema y averiguo el valor de y.

Fijate bien

En el método de **sustitución** se despeja una variable de una ecuación y se sustituye lo obtenido en la otra ecuación.

41. Ahora, Malena escribió un sistema compatible indeterminado. ¡Mirá lo que le pasó cuando intentó resolverlo!

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y = 4x + 2 \end{cases}$ → Como $y = 2x + 1$, puedo reemplazarla en la segunda ecuación.

$2y = 4x + 2 \Rightarrow 2 \cdot (2x + 1) = 4x + 2$ → Y puedo distribuir...

$\Rightarrow 4x + 2 = 4x + 2$

$\Rightarrow 0 = 0$ → ¿Eh? ¿Y esto qué significa?

a. ¿En qué caso el sistema es compatible indeterminado? ¿Cómo son sus soluciones?

b. ¿Qué puede significar la última igualdad a la que llegó?

42. **Estrategia: analizar y comparar** Malena escribió ahora un sistema incompatible. Intentá resolverlo. ¿A qué llegás en este caso? ¿Por qué pensás que ocurre?

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

43. Resolvé estos sistemas en forma analítica y clasificalos según su solución. Luego verificalos gráficamente.

a. $\begin{cases} y = 7x - 2 \\ x = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = 0{,}8x - 5 \\ 3x = y - 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -5y - 8x - 4 = 0 \\ 24x = -15y - 12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4y + 2x + 16 = 0 \\ x = -\dfrac{14}{7}y + 4 \end{cases}$

Fijate bien

Para representar conviene despejar "y" para que la ecuación de la recta quede de la forma "y = mx + b".

44. Lucas vuelve de su viaje de egresados, y su hermana y su perra Helena fueron a recibirlo. Cuando Lucas baja del micro, ve a Helena, y los dos corren a abrazarse. Las ecuaciones que dan las posiciones de Lucas y de Helena son:

$P_L = 100\,m - 5\,m/s \cdot t$ $\qquad$ $P_H = 8\,m/s \cdot t$

(t representa el tiempo en segundos).

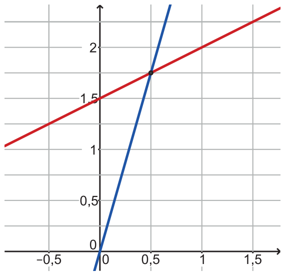
a. ¿Cuánto tiempo corren hasta que se abrazan? ¿Qué distancia recorre cada uno?

b. Verificá tus resultados gráficamente.

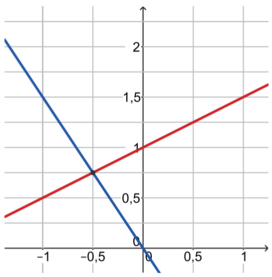
Tengo tarea

45. Escribí los sistemas de ecuaciones representados y verificá la solución en forma analítica.

a.



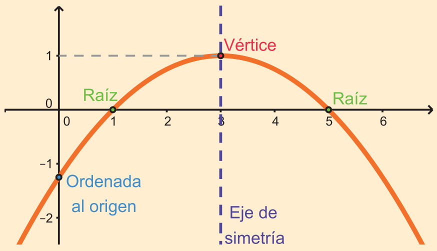
b.



Función cuadrática

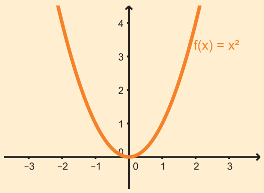
Elementos de la parábola

- La curva representada es una **parábola** y representa a una **función cuadrática**, en la que la **x** aparece al cuadrado.
  Las parábolas son simétricas respecto de un **eje de simetría** sobre el que tienen un **vértice** que indica el máximo o el mínimo de la función.
  Por otra parte, la función cuadrática puede tener hasta dos raíces distintas, y también una ordenada al origen. Esto se ve en el gráfico a partir de los puntos en los que la parábola corta a los ejes cartesianos.



La función cuadrática más elemental

La función cuadrática más simple es $f(x) = x^2$. En este caso, el eje de simetría coincide con el eje **y**, y los puntos de intersección con los ejes coinciden en el (0; 0), al igual que el vértice.
El gráfico de la función cambia a medida que la fórmula va incorporando parámetros (números), aunque siempre será una parábola.



46. Representá cada grupo de funciones en los mismos ejes y compará sus gráficos con el de $f(x) = x^2$. ¿Cómo se modifican en cada caso? También podés hacerlas "a mano", a partir de una tabla de valores.

a. $g(x) = 2x^2$; $h(x) = -4x^2$; $k(x) = 0{,}5x^2$

c. $g(x) = (x - 2)^2$; $h(x) = (x + 1)^2$; $k(x) = (x - 0{,}8)^2$

b. $g(x) = x^2 + 2$; $h(x) = x^2 - 1$; $k(x) = x^2 + 5$

d. $g(x) = (x - 2)^2 - 1$; $h(x) = (x + 3)^2 - 4$; $k(x) = -(x + 3)^2 - 4$

47. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá cada gráfico de la actividad anterior y comparalo con su fórmula. Después respondé.

a. En las funciones de la forma $f(x) = \mathbf{a}\,x^2$, ¿cómo varía el gráfico según los valores que toma **a**?

b. ¿Y en las funciones de la forma $f(x) = x^2 + \mathbf{k}$, al cambiar los valores de **k**?

c. ¿Qué pasa con las funciones de la forma $f(x) = (x - \mathbf{h})^2$, al cambiar los valores de **h**?

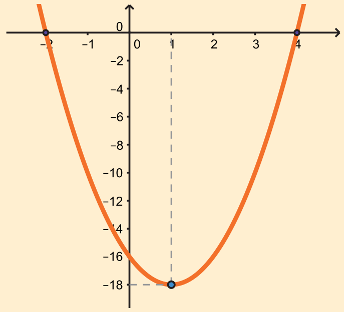
d. En las funciones de la forma $f(x) = \mathbf{a}\,(x - \mathbf{h})^2 + \mathbf{k}$, ¿qué relación hay entre **h**, **k** y los elementos de la parábola?

Análisis de la función cuadrática dada en forma canónica

- Si la fórmula de la función cuadrática está escrita de la forma: $f(x) = \mathbf{a}(x - \mathbf{h})^2 + \mathbf{k}$, con $\mathbf{a} \neq 0$, se dice que está expresada en forma **canónica**.

✓ El coeficiente principal **a** determina la **concavidad**: si **a** es positivo, las ramas van "para arriba", y si es negativo, "para abajo".

✓ Para hallar las **raíces**, se iguala la función a cero y se halla el valor de **x**. Por ejemplo, para hallar las raíces de la función $f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$ se puede resolver la ecuación:



$$2(x - 1)^2 - 18 = 0$$
$$2(x - 1)^2 = 18$$
$$(x - 1)^2 = 18 : 2, \text{ es decir, } (x - 1)^2 = 9$$

Entonces $x - 1 = 3$ o bien $x - 1 = -3$

$x = 3 + 1$ o bien $x = -3 + 1$, o sea, $x = 4$ o bien $x = -2$.

✓ El **eje de simetría** se encuentra en la mitad entre las dos raíces, por lo que puede averiguarse haciendo: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. En este caso, sería: $x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Este valor puede "verse" en la forma canónica, pues coincide con **h**: la ecuación del eje de simetría es **x = h**.

✓ Como el **vértice** es un punto, tiene una coordenada **x** y otra **y**. Además, está sobre el eje de simetría, entonces la coordenada x del vértice es **h**: $x_v = \mathbf{h}$. Para hallar la coordenada **y** se reemplaza x_v en la función y se resuelve: $y_v = f(x_v)$.

En este caso, $f(1) = 2(1 - 1)^2 - 18 = 0 - 18 = -18$.

En la forma canónica, el valor obtenido es **k**, por lo que el vértice es el punto **(h; k)**.

✓ La **ordenada al origen** se calcula reemplazando el valor de **x** por 0. En el ejemplo, $f(0) = 2(0 - 1)^2 - 18 = 2 \cdot 1 - 18 = -16$.

La expresión factorizada de la función cuadrática

- Si se conocen las raíces de una función cuadrática, se puede escribir de forma **factorizada**, es decir, como un producto: $f(x) = \mathbf{a}(x - \mathbf{x_1})(x - \mathbf{x_2})$, donde **a** es el coeficiente principal, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son las raíces.
La expresión factorizada de la función del ejemplo anterior es: $f(x) = 2(x - 4)(x - (-2))$, es decir, $f(x) = 2(x - 4)(x + 2)$.

- Si solo se conoce la expresión factorizada de una función cuadrática, lo primero que "se ve" en la fórmula son sus raíces. ¡Cuidado! Porque "se ven" con el signo cambiado. Ya conocidas las raíces, el análisis sigue igual que si estuviese en forma canónica: **eje de simetría**: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; **vértice**: x_v es el valor obtenido para el eje; $y_v = f(x_v)$; la **ordenada al origen** se calcula reemplazando el valor de **x** por 0.

48. Indicá el eje de simetría, el vértice y la ordenada al origen de cada una de estas funciones. Hallá las raíces, pero ¡cuidado!, porque una de ellas no tiene. Representalas. Después escribí la expresión factorizada de la que tiene raíces.

a. $f(x) = -0,25(x - 3)^2 + 1$

b. $f(x) = (x + 1)^2 + 4$

Fijate bien

Si una función cuadrática no tiene raíces, puede graficarse a partir del vértice y la ordenada al origen, usando el eje de simetría para marcar un punto simétrico a la ordenada al origen.

La función cuadrática en forma polinómica

- Las funciones cuadráticas también pueden expresarse en forma **polinómica**. En ese caso, su fórmula tiene la forma: $f(x) = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$, donde **a** es el coeficiente principal y, como antes, no puede ser cero; **b** y **c** son números reales.

  ✓ Como en los otros casos, para encontrar las **raíces**, se iguala la función a cero y se halla el valor de **x**. En este caso, no es fácil "despejar" la **x** y por eso se usa la fórmula: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$.

  Por ejemplo, en la función $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$, vale que: **a** = 2; **b** = – 4; y **c** = –16. Reemplazando en la fórmula:

  $$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+128}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4}$$ → De ahí pueden obtenerse dos valores:

  $x_1 = \dfrac{4+12}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$ y $x_2 = \dfrac{4-12}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$. Es decir, las raíces de esta función son: $x = 4$ y $x = -2$.

  Conocidas las raíces, el análisis sigue igual que en cualquiera de las otras formas. También puede calcularse el eje de simetría con la fórmula: $x = \dfrac{-b}{2a}$.

  En particular, en esta forma se observa que la **ordenada al origen** coincide con el valor de **c**: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Entonces, $f(0) = c$. En el ejemplo, la ordenada al origen es –16.

- Al tener las mismas raíces y el mismo coeficiente principal que las funciones del ejemplo de la página anterior, se deduce que también tendrá el mismo eje de simetría, el mismo vértice y la misma ordenada al origen. En consecuencia, esta función es la misma que aquellas, expresada de otra forma:

Forma canónica: $f(x) = 2(x-1)^2 - 18$	Forma factorizada: $f(x) = 2(x-4)(x+2)$	Forma polinómica: $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

- A veces es conveniente analizar si la función tiene raíces, antes de hacer toda la cuenta. En la forma polinómica puede hacerse calculando el **discriminante**, que es el valor que aparece en la fórmula, dentro de la raíz: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Si el discriminante es positivo, la función tiene dos raíces reales distintas, como en el ejemplo; si ese valor es 0, la función tiene solo una raíz (y se dice que la raíz es doble); y si el discriminante es negativo, la función no tiene raíces reales.

49. Sin hacer cuentas, mencioná todo lo que puedas del gráfico de cada una de estas funciones cuadráticas.

a. $f(x) = -5(x-2)^2 - 3$ **b.** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **c.** $f(x) = -(x+3)(x-2)$

50. Hallá las raíces, la ordenada al origen, el eje de simetría y el vértice de estas funciones. Representalas. Después escribí su fórmula en forma factorizada y en forma canónica.

a. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ **b.** $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

51. Encontrá analíticamente la solución de estos sistemas de ecuaciones y clasificalos.

a. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -1 \\ 2x + 4 = -6y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 2 - y \\ 8 = 4x + 6y \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 5x + 2 = 3y \end{cases}$

d. $\begin{cases} y - 3 = 4x \\ 6 - 8x + 2y = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x + 5y = 25 \\ -2x + \frac{5}{2}y = -5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{8}{3} - 2y \\ -\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}y = 10 \end{cases}$

52. Escribí la ecuación de una recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que pase por el punto de intersección de las rectas $y = x + 5$ e $y = -3x + 3$.

53. Encontrá en forma analítica la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, y la que pasa por los puntos (0; 4) y (4; 1). Después hacé un gráfico para comprobar tus resultados.

54. Encontrá los valores de **c** y **d** para que el sistema sea...

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 4 \\ y = cx + d \end{cases}$

a. ... compatible determinado.
b. ... compatible indeterminado.
c. ... incompatible.

55. Mati y Santi analizan las soluciones de un sistema de ecuaciones. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Mati: Yo pienso que para que sea compatible determinado, basta con saber que las pendientes de las rectas son distintas.

Santi: ¿Estás seguro? Porque creo que alcanza solo con ver que tengan distinta ordenada al origen.

56. Analizá estas funciones cuadráticas indicando la ordenada al origen, si tienen raíces, cuáles son, el eje de simetría y el vértice. Después representalas.

a. $f(x) = x^2 + 2x$

b. $f(x) = -x^2 + \frac{1}{9}$

c. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

d. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 1$

e. $f(x) = -\frac{1}{5}(x+3)(x-5)$

f. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

57. Estrategia: realizar un gráfico de análisis

¿Verdad o mentira? ¿Por qué?

a. Una función cuadrática con $c = 0$ tiene una raíz en $x = 0$.

b. Una función cuadrática con vértice en el primer o segundo cuadrante y coeficiente principal positivo no tiene raíces reales.

c. Una función cuadrática con el vértice en el eje **x** no tiene raíces reales.

58. Una parábola tiene una raíz en $x = -1$ y su eje de simetría en $x = 4$.

a. ¿Cuál es la otra raíz?

b. ¿Puede haber más de una parábola con esas raíces y ese eje de simetría? ¿Cómo te das cuenta?

c. Si el coeficiente principal es 2, ¿cuál es la fórmula de la parábola? ¿Y el vértice?

59. Señalá si cada afirmación referida a la función $f(x) = 2(x + 5)(x - 3)$ es verdadera o falsa. Si es falsa, indicá qué sería lo correcto.

a. La raíces de la función son $x = 5$ y $x = -3$.

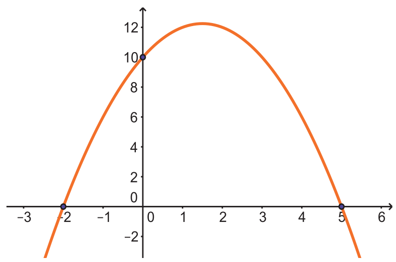
b. La función tiene un máximo en $x = -1$ y su valor es $y = -32$.

c. La ordenada al origen es -15.

60. Identificá cuál es la fórmula de la función representada. Luego hallá los elementos de la parábola que no se señalan en el gráfico.

$f_1(x) = -(x + 5)(x - 2)$ $\quad$ $f_3(x) = 2(x + 2)(x - 5)$

$f_2(x) = -2(x + 2)(x - 5)$ $\quad$ $f_4(x) = -(x + 2)(x - 5)$



61. Mirá el gráfico de esta función.



a. Indicá los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

b. ¿Tiene raíces? ¿Y ordenada al origen? Si las tiene, mencionalas.

c. Señalá los máximos y los mínimos, indicando si son relativos o absolutos y para qué valores de **x** se producen.

62. Encontrá la raíz y la ordenada al origen de cada una de estas funciones lineales, y señalá si son crecientes o decrecientes. Representalas.

a. $f(x) = -\frac{2}{5}x + 6$

b. $f(x) = \frac{3}{4}x - 5$

c. $f(x) = -\frac{5}{2}x + 4$

d. $f(x) = \frac{7}{3}x - 1$

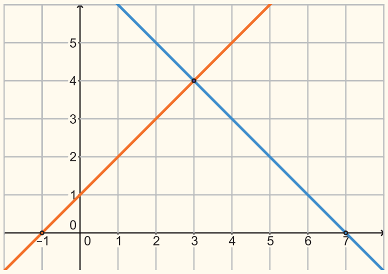
63. Pilar sabe que el gráfico de una función lineal pasa por los puntos (3; 2) y (8; 5), y dice que es decreciente. ¿Tiene razón? ¿Cómo te diste cuenta?

64. Marcelo, el arquitecto, está haciendo un presupuesto para pintar una casa. Por el momento solo sabe que la altura de las habitaciones es de 2,50 m, pero no conoce cuánto miden, de largo, las paredes que tiene que pintar. Además, sabe que el costo de la pintura por metro cuadrado a cubrir es de $ 15 por mano.

a. Escribí la fórmula de una función que permita obtener el costo de la pintura que se necesita para dar dos manos a cada pared, en función del largo de las paredes.

b. Si su cliente cuenta con $ 1.500 para comprar la pintura y el largo de las paredes que tienen que pintarse suman 24 m, ¿le alcanza el presupuesto? ¿Le sobra o le falta dinero? ¿Cuánto?

65. Escribí las ecuaciones de las rectas representadas. ¿Son perpendiculares?



66. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es paralela a $y = 3x + 4$ y que pasa por el punto (2; 1)? ¿Es creciente o decreciente?

67. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular a las de la actividad anterior, que también pasa por el punto (2; 1)? ¿Esta nueva recta es creciente o decreciente?

68. Dani dibujó dos rectas perpendiculares que tienen ordenada al origen 2. La raíz de una de ellas es 5. ¿Cuál es la raíz de la otra?

69. Matías quiere dibujar dos rectas perpendiculares cuyas raíces sean $x = -4$ y $x = 3$, respectivamente. Encontrá dos rectas que cumplan con esa condición. ¿Son las únicas rectas posibles?

70. Lore dibujó dos rectas perpendiculares que tienen en común el punto (5; 3). ¿Podés escribir la ecuación de las rectas que ella dibujó solo con ese dato? Explicá tu respuesta.

71. Clasificá los sistemas de ecuaciones según sus soluciones. Además, verificá si alguno está formado por rectas perpendiculares.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 5y - 11 - 3x = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 15 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

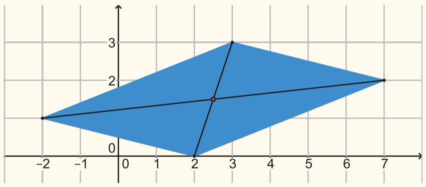
c. $\begin{cases} y = -0{,}75x + 2{,}5 \\ 3x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$

72. Las rectas que forman el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ dy - 12 + cx = 0 \end{cases}$$

son perpendiculares y se cortan en el punto (4; –4). Encontrá los valores de **c** y **d**.

73. Si se recorta un paralelogramo, por ejemplo, de madera, y su masa es homogénea, entonces su centro de masa está en la intersección de sus diagonales. Indicá las coordenadas del centro de masa del paralelogramo representado.



74. Estrategia: realizar un gráfico de análisis Tres de los vértices de un cuadrado son los puntos: (2; 5), (–1; 2) y (5; 2).

a. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del cuadrado?
b. ¿Cuál es el otro vértice? Verificalo en forma analítica.

75. Lucas armó un triángulo rectángulo de forma que uno de los lados está contenido en el eje **x**, y otro, en la recta que pasa por los puntos (–1; 1) y (3; 5). El tercer lado contiene el punto (5; 3).

a. Encontrá las rectas que pueden contener el lado restante.
b. Encontrá los vértices de cada uno de los triángulos que pueden formarse.
c. Hacé un gráfico y coloreá la región triangular en cada caso.

76. Milena tiene que armar un triángulo con un lado contenido en la recta $y = -0,25x + 4$, otro lado, en la recta $-3x + 5y = 3$, y con dos de vértices en los puntos (–1; 0) y (0; 4).

a. Escribí la ecuación de la recta que contiene el tercer lado.
b. Encontrá el vértice que falta en forma analítica.
c. Realizá el gráfico de la situación y coloreá el triángulo que se formó.
d. El triángulo que encontraste ¿es rectángulo? ¿Cómo te das cuenta sin medir los ángulos?

77. Volvé a la actividad anterior.

a. Escribí la ecuación de la recta que divide al triángulo en dos triángulos rectángulos.
b. Ambos triángulos tienen un vértice en común en la recta $-3x + 5y = 3$. ¿Cuáles son sus coordenadas?

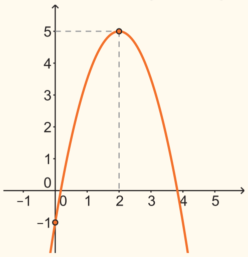
78. Para cada una de estas funciones cuadráticas encontrá las raíces (si tienen), la ordenada al origen, el eje de simetría, las coordenadas del vértice y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a. $f(x) = 2x^2 + 5x - 10$
b. $g(x) = -3x^2 - 5$
c. $h(x) = -5x^2 - 8x + 4$
d. $i(x) = x(x - 5)$

79. Estrategia: analizar y comparar Identificá si estas fórmulas corresponden a algunas de las parábolas representadas en la actividad anterior y, en tal caso, señalá de qué forma está escrita cada una. Si alguna no corresponde a ninguna de las anteriores, representala y hallá sus elementos.

a. $j(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
b. $k(x) = -3(x - 5)(x + 2)$
c. $l(x) = x^2 - 5x$
d. $m(x) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x + 2)$

80. Escribí la ecuación de esta parábola. Fijate cuánto debe valer **a** para que la ordenada al origen tome el valor que se observa en el gráfico.



81. Estrategia: realizar un gráfico de análisis Escribí la ecuación de la parábola que tiene una raíz en $x = 2$ y vértice en el punto (6; 16). ¿Cuál es la otra raíz? ¿Cómo te das cuenta? ¿Y cuánto vale **a**?

82. Si se tira una pelota verticalmente hacia arriba, su altura, en función del tiempo, está dada por la fórmula $h(t) = 10m/s \cdot t - 5m/s^2 \cdot t^2$.

a. ¿Cuál fue la máxima altura alcanzada por la pelota y cuánto tiempo tardó en alcanzarla, si t está expresado en segundos?
b. ¿Cuánto tiempo después de ser lanzada volvió al punto de partida?

Saquen una hoja

AUTOEVALUACIÓN

Marcá la opción correcta.

1. Si en el gráfico de una función se observa que a medida que aumentan los valores de **x**, también aumentan los valores de **y**, entonces la función es:

- [ ] Constante.
- [ ] Creciente.
- [ ] Decreciente.
- [ ] A veces creciente y a veces decreciente.

2. Una función lineal de pendiente no nula...

- [ ] ... no tiene raíces.
- [ ] ... tiene una única raíz.
- [ ] ... tiene un máximo.
- [ ] ... tiene un mínimo.

3. La ecuación de la recta que pasa por el punto (4; 3) y tiene por ordenada al origen 7 es:

- [ ] $y = x + 7$
- [ ] $y = -x + 7$
- [ ] $y = -7x + 7$
- [ ] $y = -2x + 14$

4. La ecuación de la recta que es perpendicular a $y = \frac{2}{5}x - 2$ y que pasa por el punto (4; –7) es:

- [ ] $y = -\frac{2}{5}x + 3$
- [ ] $y = -\frac{2}{5}x - 3$
- [ ] $y = -\frac{5}{2}x + 3$
- [ ] $y = -\frac{5}{2}x - 3$

5. El sistema

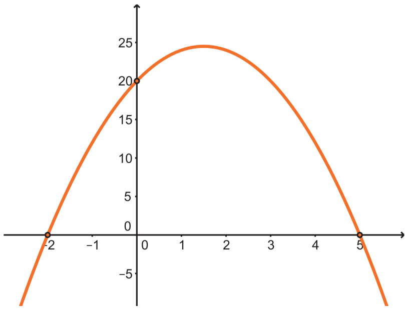
$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y - 8x + 5 = 0 \end{cases}$$

- [ ] ... tiene una sola solución para $x = -2$; $y = 11$.
- [ ] ... tiene una sola solución para $x = 2$; $y = -11$.
- [ ] ... no tiene solución.
- [ ] ... tiene una sola solución para $x = 2$; $y = 11$.

6. Las rectas que tienen la misma pendiente...

- [ ] ... siempre forman un sistema compatible determinado.
- [ ] ... siempre forman un sistema incompatible.
- [ ] ... siempre forman un sistema compatible indeterminado.
- [ ] ... a veces forman un sistema compatible indeterminado y otras, uno incompatible.

7. La fórmula de la función cuadrática representada es:

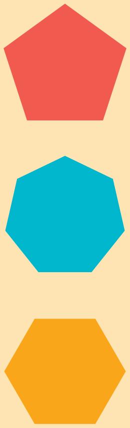


- [ ] $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$
- [ ] $f(x) = -2x^2 - 6x + 20$
- [ ] $f(x) = -2x^2 + 6x - 20$
- [ ] $f(x) = -2x^2 - 6x - 20$

Controlá tus respuestas en las páginas 159 y 160.

Esto ya lo sabía...

1. Uní cada polígono con su nombre (algunos nombres están de más).



Octógono

Hexágono

Pentágono

Cuadrado

Heptágono

2. Volvé a la actividad anterior.

a. Algunos nombres corresponden a polígonos que no están representados. ¿Cuántos lados tiene cada uno de ellos?

b. ¿Cuántos lados tiene un decágono?

c. ¿Qué nombre recibe un polígono de veinte lados?

d. ¿Qué nombre reciben los polígonos que tienen todos los lados y todos los ángulos de la misma medida?

Matemundo



Durante mucho tiempo, todo lo que se conocía de geometría estuvo desperdigado por distintos lugares, y nadie sabía bien qué era lo que en realidad se sabía. Hasta que llegó Euclides (330-275 a.C.) quien, partiendo de definiciones, postulados y axiomas, estableció por rigurosa deducción lógica el armonioso edificio de la geometría griega.

Juzgada como uno de los más altos productos de la razón humana, la geometría euclidiana mantuvo su hegemonía durante más de veinte siglos, hasta la aparición, ya en el siglo XIX, de las geometrías no euclidianas.

Actualmente, ambas geometrías se usan para diversos propósitos. Albert Einstein, por ejemplo, utilizó las no euclidianas en su teoría de la relatividad. Sin embargo, no solo se emplean en las ciencias, sino también en la arquitectura y en la realización de obras de arte, entre otras aplicaciones.

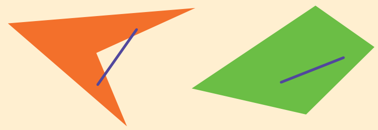
En la foto podés ver un producto de la geometría euclidiana: la pirámide de vidrio, frente al Louvre, el museo más conocido de París.

- Averiguá si la geometría que se estudia en la escuela es euclidiana o no euclidiana.

Cuadriláteros

Polígonos de cuatro lados

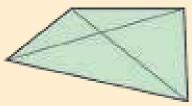
Los **cuadriláteros** son los polígonos que tienen cuatro lados. Hay convexos y cóncavos, según contengan o no todos los puntos de un segmento con extremos en el polígono.



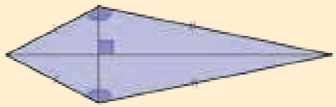
Cóncavo Convexo

Se clasificarán los cuadriláteros convexos. Estos reciben distintos nombres según la medida y la disposición de sus lados. Se considera que los lados y los ángulos señalados de la misma forma son congruentes.

- **Trapezoides**: son los que no tienen lados paralelos. Los trapezoides que tienen dos pares de lados consecutivos congruentes (de la misma medida) se denominan **romboides**.

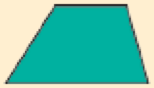


Trapezoide (común)

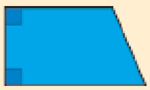


Romboide
Las diagonales son perpendiculares y solo una corta la otra por la mitad .

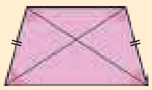
- **Trapecios**: tienen un solo par de lados paralelos, considerados **bases** del cuadrilátero.



Trapecio (común)

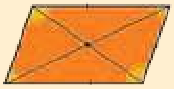


Trapecio rectángulo
Tiene dos ángulos rectos.

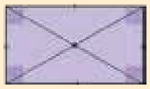


Trapecio isósceles
Los ángulos de cada base son congruentes.
Las diagonales son congruentes.

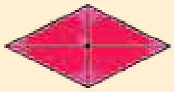
- **Paralelogramos**: tienen dos pares de lados paralelos y congruentes. En todos los paralelogramos, los ángulos opuestos son congruentes y las diagonales se cortan en el punto medio.



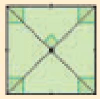
Paralelogramo (común)



Rectángulo
Los ángulos son rectos. Las diagonales son congruentes.



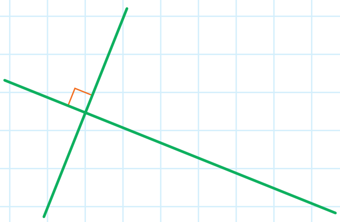
Rombo
Los lados son congruentes.
Las diagonales son perpendiculares.



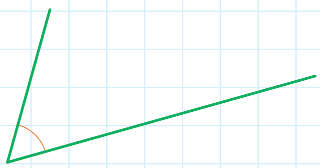
Cuadrado
Es un rectángulo y un rombo, al mismo tiempo.

3. Construí el cuadrilátero según lo que se indica en cada caso, tomá las medidas que creas necesarias y señalá de qué tipo es cada uno.

a. Estos segmentos son sus diagonales.



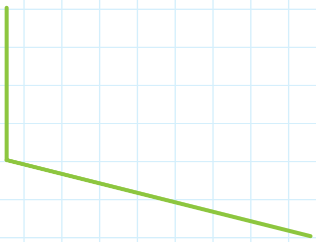
b. Tiene dos pares de lados paralelos.



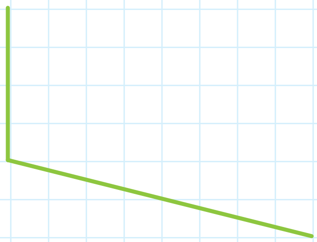
4. Dibujá dos cuadriláteros con dos lados de 4 cm y otros dos de 2 cm. ¿Qué tipo de cuadrilátero es cada uno de los que construiste? ¿Podrías haber realizado alguno de otro tipo con esas características? Explicá tu respuesta.

5. En cada caso se trazaron dos lados de una figura. Completala para que se forme el cuadrilátero que se pide.

a. Un romboide.



b. Un trapecio isósceles.



Fijate bien

Recordá que los lados paralelos del trapecio se consideran sus bases.

6. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los cuadriláteros que dibujaste en la actividad anterior y comparalos con los que realizaron tus compañeros. Después señalá quién o quiénes están en lo cierto y explicá por qué.



7. Dibujá un cuadrilátero con dos ángulos de 50°, que además cumpla lo que se pide en cada caso.

a. Los ángulos de 50° no son opuestos y los otros dos ángulos son distintos entre sí.

b. Los ángulos de 50° son opuestos y los otros dos ángulos son distintos entre sí.

c. Los ángulos de 50° no son opuestos y los otros dos ángulos son congruentes.

d. Los ángulos de 50° son opuestos y los otros dos ángulos son congruentes.

8. Mili dibujó una circunferencia y trazó dos diámetros. Piensa usarlos para construir un cuadrilátero con esos diámetros como diagonales. ¿Qué cuadriláteros podría dibujar? Si es posible, construí dos distintos.

Fijate bien

Tené en cuenta las características de las diagonales de los cuadriláteros.

9. Raúl quiso hacer un paralelogramo común usando los diámetros de una circunferencia, como hizo Mili, pero por más que lo intentó, no lo logró. ¿Por qué?

10. Dibujá un cuadrilátero que cumpla lo que se pide en cada caso.

a. Tiene solo un lado de 3 cm.

b. Tiene solo dos lados de 3 cm.

c. Tiene solo tres lados de 3 cm.

d. Tiene todos los lados de 3 cm.

11. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los cuadriláteros que dibujaste hasta ahora. Después indicá cuáles de estas afirmaciones son ciertas y cuáles no, y explicá por qué.

a. Las diagonales de los cuadriláteros se cortan en su punto medio.

b. Si un cuadrilátero tiene los cuatro lados iguales, es un cuadrado.

c. Un trapecio isósceles puede tener tres lados iguales.

Tengo tarea

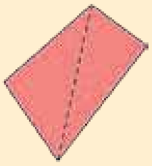
12. Sin medir con la regla ni con el transportador, dibujá en tu carpeta cada uno de estos cuadriláteros. Podés usar el compás para tomar medidas.

a. Un paralelogramo común.
b. Un rombo.

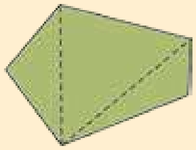
Propiedades de los polígonos

Suma de los ángulos interiores

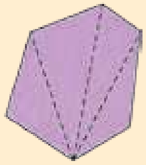
- Para calcular la **suma de los ángulos interiores** de un polígono, se lo divide en triángulos, trazando todas las diagonales desde un vértice. Luego se considera que los ángulos interiores de cada triángulo suman 180°.



Cuadrilátero
$2 \cdot 180° = 360°$



Pentágono
$3 \cdot 180° = 540°$

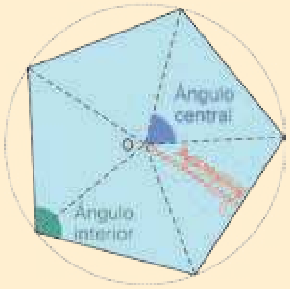


Hexágono
$4 \cdot 180° = 720°$

Siempre hay dos triángulos menos que la cantidad de lados del polígono. Por eso, la suma de los ángulos interiores (SAI) de un polígono de **n** lados, se calcula haciendo: $SAI = (n - 2) \cdot 180°$.

Polígonos regulares

- Los **polígonos regulares**, o sea, los que tienen todos sus ángulos y todos sus lados congruentes (de la misma medida), siempre pueden inscribirse en una circunferencia. Es decir que siempre puede dibujarse una circunferencia que pasa por todos sus vértices; su centro también se considera centro del polígono.



Como todos los **ángulos interiores** miden lo mismo, la medida de cada uno puede calcularse dividiendo la suma de los ángulos interiores por la cantidad de lados del polígono.

Si la cantidad de lados es **n**, cada ángulo interior mide: $\text{Ángulo interior} = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$

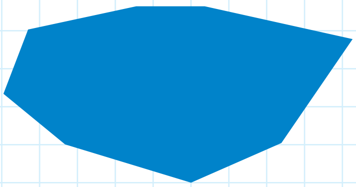
También puede calcularse la medida de un ángulo central haciendo:

$\text{Ángulo central} = 360° : n$

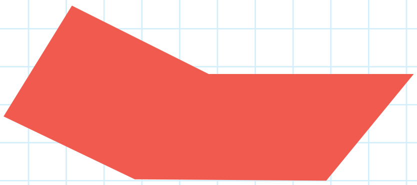
Al unir el centro del polígono con cada uno de sus vértices, se determinan **n** triángulos. La altura de cada uno de ellos se llama **apotema**. Como los triángulos determinados son todos isósceles, la apotema corta el lado en su punto medio. Además, por ser altura del triángulo, también es perpendicular a ese lado.

13. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de estos polígonos?

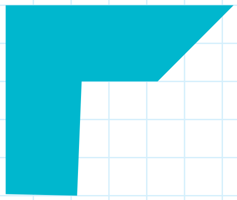
a.



b.



c.



14. Dibujá un cuadrado, encontrá su centro y trazá la circunferencia que lo inscribe. Después calculá el valor de un ángulo central.

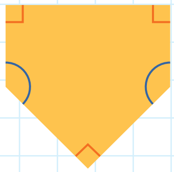
Fijate bien

Los triángulos equiláteros y los cuadrados son dos polígonos regulares.

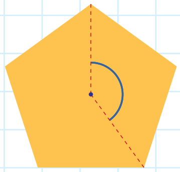
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

15. Calculá el valor de los ángulos señalados en cada polígono. Considerá los ángulos rectos indicados.

a. Los dos ángulos son congruentes.



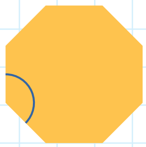
c. Es regular; el vértice del ángulo es su centro.



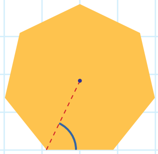
Fijate bien

Tené en cuenta que el segmento que une el centro con un vértice del polígono regular es radio de la circunferencia que lo inscribe.

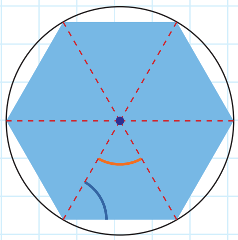
b. Es regular.



d. Es regular; el punto señalado es su centro.



16. **Estrategia: empiezo por el final** Analizá algunas características del hexágono regular.



a. ¿Cuánto mide cada ángulo central?

b. Ahora mirá cada uno de los triángulos de la imagen. ¿Cuánto mide cada ángulo de la base? ¿De qué tipo de triángulo se trata?

c. ¿Qué relación hay entre el lado del hexágono y el radio de la circunferencia?

d. Con la información anterior, ¿cómo harías para construir un hexágono regular?

e. Construilo.

Tengo tarea

17. ¿De qué polígono regular se trata en cada caso?

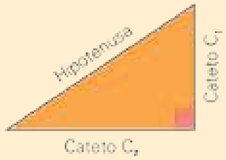
a. Tiene ángulos centrales de 36°.

b. Cada ángulo interior mide 150°.

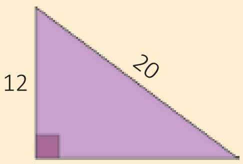
c. Cada ángulo interior mide lo mismo que cada ángulo central.

Una propiedad del triángulo rectángulo

- En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el otro, que siempre es el mayor, se denomina **hipotenusa**.



- Como se vio en el Capítulo 3, si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, el otro puede calcularse usando el teorema de Pitágoras: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$
$$20^2 = 12^2 + C_2^2$$
$$400 = 144 + C_2^2$$
$$C_2^2 = 400 - 144$$
$$C_2^2 = 256$$
$$C_2 = \sqrt{256}$$
$$C_2 = 16$$

(Se toma solo el valor positivo, ya que la medida siempre es positiva).

Este teorema puede ayudarte a calcular distintas medidas en los polígonos: diagonales, lados, apotemas. Solo es cuestión de "encontrar" el triángulo rectángulo apropiado.

18. Calculá lo que se pide en cada caso. Realizá una figura de análisis.

a. La diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.

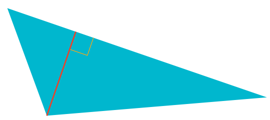
b. La altura de un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

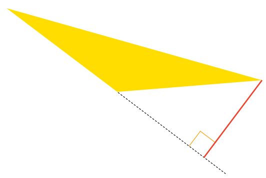
c. El lado de un rombo cuyas diagonales miden 4 y 6 cm.

d. La apotema de un hexágono regular de 5 cm de lado.

Fijate bien

Los triángulos tienen tres alturas. Cada una es perpendicular a un lado. En la imagen podés ver una altura de cada triángulo.





19. Construí los polígonos de la actividad anterior y verificá los valores obtenidos. No pierdas el archivo, porque vas usarlo en la actividad 21.

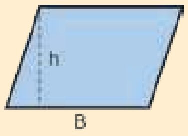
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Perímetro y área de polígonos

Algunas fórmulas

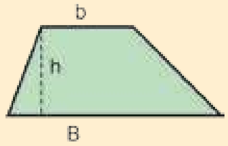
- Para calcular el **perímetro** de un polígono, se suman las longitudes de todos sus lados, mientras que para calcular cuánto mide su superficie, se calcula su **área**.
  Por eso, si el perímetro se mide, por ejemplo, en metros (m), el área se mide en metros cuadrados (m^2).
  Para calcular el área de los polígonos convexos se pueden usar algunas fórmulas.

Área de paralelogramos



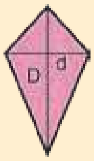
$\text{Área} = B \cdot h$

Área de trapecios



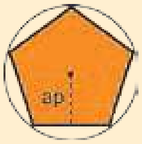
$\text{Área} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$

Área de rombos y romboides



$\text{Área} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

Área de polígonos regulares



$\text{Área} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$

20. Calculá el perímetro y el área de los polígonos de la actividad 18. ¿En cuáles tenés que usar lo que habías hallado?

a. Un cuadrado de 3 cm de lado.

b. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

c. Un rombo cuyas diagonales miden 4 y 6 cm.

d. Un hexágono regular de 5 cm de lado.

21. Volvé al archivo de la actividad 19. Mirá en la lista algebraica: los valores que figuran al lado del nombre de cada polígono son sus áreas aproximadas. ¿Coinciden con los que calculaste?

22. **Estrategia: analizo y comparo** El cuadrado es el cuadrilátero que más propiedades tiene. Por eso, su área puede hallarse usando varias de las fórmulas mencionadas. Calculala de diferentes formas, considerando que el lado del cuadrado es de 3 cm, y verificá que todas te den igual. (Ya realizaste uno de estos cálculos en la actividad 20).

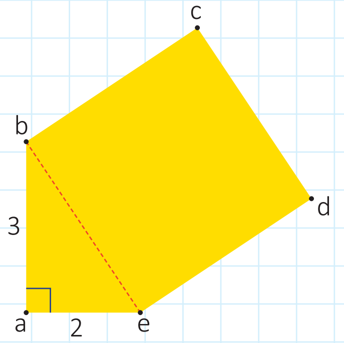
a. A partir del área de un paralelogramo. →

b. A partir del área de un rombo. →

c. A partir del área de un polígono regular. →

23. **Estrategia: descomponer en figuras más simples** Calculá el perímetro y el área de cada polígono. Tal vez te falten algunos datos y tengas que calcularlos previamente.

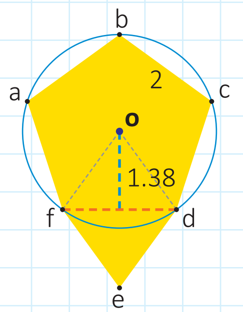
a. Del polígono abcde; considerá que el bcde es un cuadrado.



Fijate bien

Cuando se forman triángulos rectángulos, podés usar el teorema de Pitágoras.

b. Del polígono abcdef, considerá que el triángulo def es congruente al dof, y el pentágono abcdf es regular.



Fijate bien

Recordá que la apotema es perpendicular al lado.

24. Construí cada uno de los cuadriláteros que se indican.

a. Con dos lados paralelos de 3 cm.
b. Con sus diagonales de 3 cm cada una.
c. Con dos ángulos consecutivos de 65° y el lado comprendido entre ellos de 3 cm.
d. Con dos lados de 3 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 100°.

25. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los cuadriláteros que construiste en la actividad anterior. En todos los casos puede dibujarse más de uno con esas características. ¿De qué tipo es cada uno de los que dibujaste y cuál otro te parece que se podría dibujar?

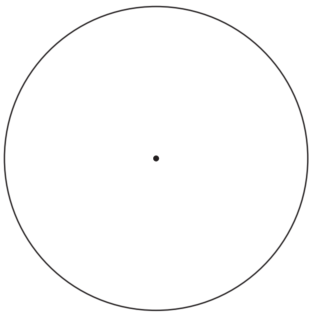
26. Malena dibujó en su carpeta un romboide y por teléfono intenta explicarle a Juan lo que hizo.

> No me acuerdo del nombre, y no anda la cámara del celu para mandarte la foto, pero es fácil porque tiene dos lados de 4 cm y los otros dos de 6 cm.

Malena

a. ¿En qué otro tipo de cuadrilátero puede pensar Juan?
b. ¿Qué otra cosa le dirías a Juan para que solo pueda dibujar un romboide?
c. ¿Y para que sea igual al de Malena?

27. Diego tiene que dibujar un pentágono regular inscripto en esta circunferencia.



a. ¿Necesita la medida del lado?
b. ¿Qué puede calcular antes de empezar a dibujarlo?
c. Dibujalo.

28. Dibujá un cuadrado de 5 cm de lado.

a. Encontrá el centro de la circunferencia que lo inscribe y dibujala.
b. ¿Cuánto mide su radio? ¿Tuviste que hacer alguna cuenta para saberlo? Si hiciste alguna, indicá cuál, y si no, explicá cómo te diste cuenta.
c. Marcá la apotema. ¿Cuánto mide? ¿Tuviste que hacer alguna cuenta para saberlo? Si hiciste alguna, indicá cuál, y si no, explicá cómo te diste cuenta.
d. ¿Cuánto mide cada ángulo central?

29. Indicá cuáles de estas afirmaciones no son ciertas.

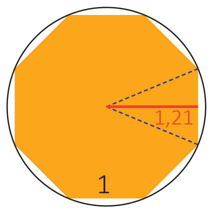
a. Ningún polígono regular tiene ángulos interiores agudos.
b. Ningún polígono regular tiene ángulos interiores rectos.
c. Ningún polígono regular tiene ángulos interiores de más de 180°.

30. Calculá la medida del lado que falta en cada triángulo rectángulo (aproximá a los centésimos).

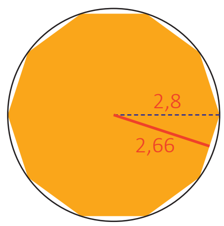
a. Los catetos miden 2 cm cada uno.
b. Los catetos son iguales y la hipotenusa mide 10 cm.
c. Un cateto es el doble del otro y la hipotenusa mide 20 cm.

31. Calculá el perímetro y el área de cada uno de estos polígonos regulares.

a. El segmento rojo es la apotema.



b. El segmento rojo es la apotema.



Circunferencias y rectas

¿Circunferencia o círculo?

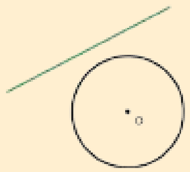
- El **círculo** está formado por todos los puntos del plano que están a una distancia **menor o igual** que **r** respecto de un punto **o**.
  La **circunferencia** es el borde del círculo, es decir, todos los puntos que están a una distancia **igual** que **r** respecto de **o**.
  En ambos casos, el punto **o** es el centro y **r** es el radio.
- Si se unen dos puntos de la circunferencia en línea recta, se determina una **cuerda**, y si se unen sobre la circunferencia, se determinan dos **arcos**. Un **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Mide el doble del radio y divide la circunferencia en dos semicircunferencias.
- Para calcular el **perímetro del círculo**, o la **longitud de la circunferencia**, y el **área** del círculo se usan estas fórmulas: Long. circunf. $= 2 \cdot \pi \cdot r$ Área círculo $= \pi \cdot r^2$
  Si se quiere calcular la longitud de un arco o el área de un sector circular (como una porción de pizza), debe tenerse en cuenta el ángulo que abarca, considerando que a la circunferencia completa le corresponde un ángulo de 360°. Por ejemplo, para un ángulo de 30°:

$$\text{Long. arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 30°}{360°} \qquad \text{Área sector circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30°}{360°}$$

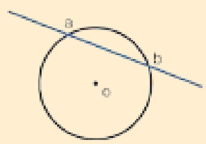


Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

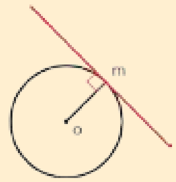
- Una recta puede ser **exterior** a una circunferencia si no la toca, **secante** si la corta en dos puntos, o **tangente** si la toca en un solo punto, llamado punto de tangencia.



Recta **exterior**



Recta **secante**



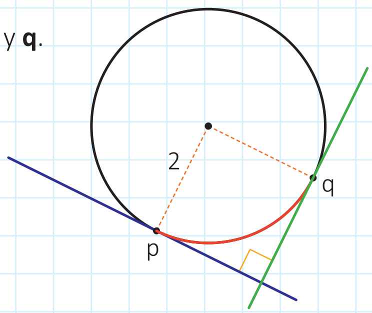
Recta **tangente**

La recta tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

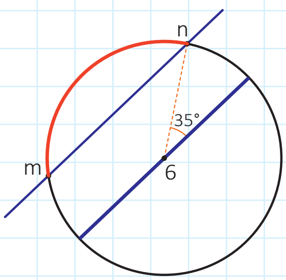
32. Las rectas representadas son tangentes a la circunferencia en los puntos **p** y **q**. Mirá los otros datos de la imagen y realizá lo que se pide en cada caso.

a. Determiná el ángulo que forman los dos radios.

b. Calculá la longitud del arco **pq** coloreado.



33. En la circunferencia se marcaron un radio y un diámetro. Además, se trazó una recta secante en **m** y **n** paralela al diámetro. Calculá la longitud del arco **mn** coloreado. Considerá las medidas indicadas en la figura.



Tengo tarea

34. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

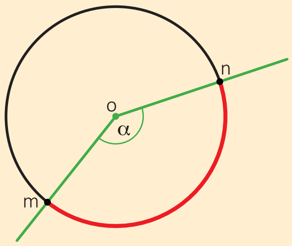
Rosa: –El centro del círculo es uno de sus puntos y también es punto de la circunferencia.

Juan: –No, Rosa; es cierto en el círculo, pero no en la circunferencia.

Ángulos en la circunferencia

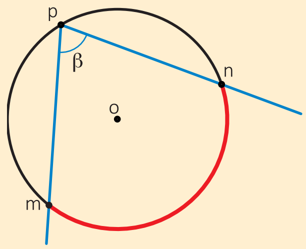
Ángulos centrales, inscriptos y semiinscriptos

- En la circunferencia, los ángulos reciben diferentes nombres según la ubicación del vértice y la posición de sus lados.



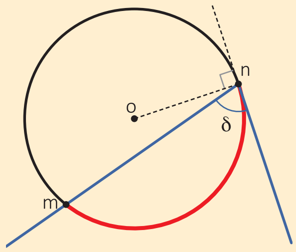
Ángulo central

Vértice en el centro.



Ángulo inscripto

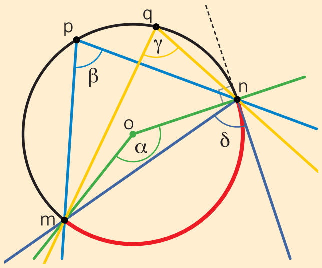
Vértice en la circunferencia.
Los lados son secantes.



Ángulo semiinscripto

Vértice en la circunferencia.
Un lado es secante y el otro, tangente.

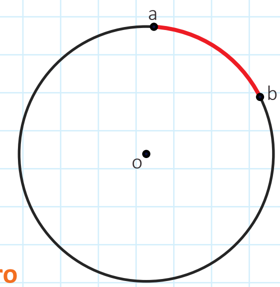
- Todos estos ángulos abarcan un arco de circunferencia. Si dos ángulos **del mismo tipo** abarcan el mismo arco, o arcos de igual longitud, entonces miden lo mismo.



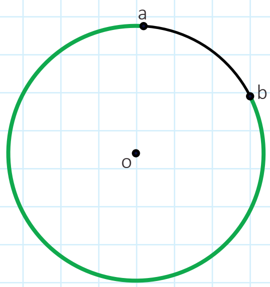
El ángulo α es un ángulo central.
Los ángulos β y γ son ángulos inscriptos.
El ángulo δ es un ángulo semiinscripto.
Todos abarcan el arco **mn** coloreado. Por eso, los ángulos β y γ miden lo mismo.

- Una propiedad importante de estos ángulos es que cada ángulo central mide el **doble** que cualquier inscripto o semiinscripto que abarque el mismo arco.
  En la imagen, el ángulo α mide el doble que los ángulos β, γ y δ porque todos abarcan el mismo arco.

35. La profe les repartió a los alumnos copias de una circunferencia con los puntos **a** y **b** marcados, y les pidió que pintaran el arco **ab** y midieran el ángulo central correspondiente. Mirá lo que hicieron Pedro y Julián.



Pedro



Julián

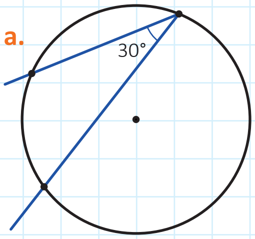
a. Marcá el ángulo central en cada caso.

b. Si el ángulo central que midió Pedro es de 60°, ¿cuánto mide el de Julián? ¿Cómo te diste cuenta?

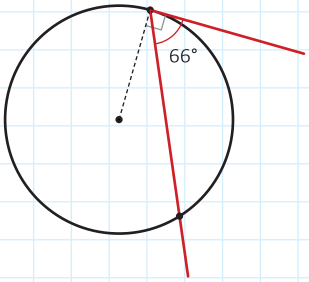
c. ¿Dónde deberían ubicarse los puntos **a** y **b** para que los arcos y los ángulos de Pedro y Julián midan lo mismo?

36. Señalá si cada uno de estos ángulos es inscripto o semiinscripto y pintá el arco que abarca. Después trazá el ángulo central correspondiente y calculá su medida.

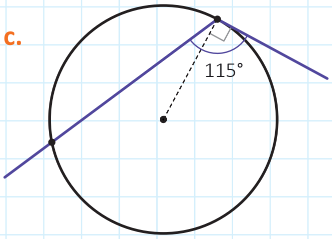
a.



b.

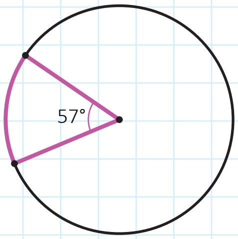


c.

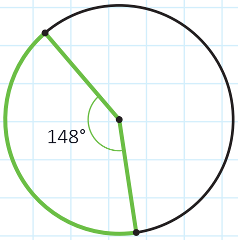


37. Dibujá ángulos que abarquen el mismo arco que el ángulo central representado en cada circunferencia según lo pedido en cada caso. Después calculá la medida de cada uno.

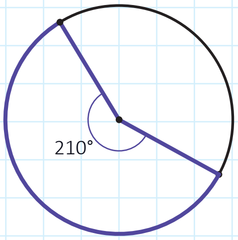
a. Un ángulo inscripto.



b. Un ángulo semiinscripto.



c. Un ángulo inscripto.



GG **38.** Dibujá una circunferencia y dos puntos **a** y **b** sobre ella. También podés hacerlo sin la compu.

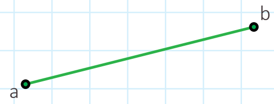
a. Marcá un ángulo inscripto que abarque el arco **ab** y desplazá el vértice de manera que siempre se abarque el mismo arco. Si lo hacés sin la compu, dibujá tres ángulos con estas características.
b. Después señalá dos ángulos semiinscriptos que también abarquen el mismo arco **ab**.
c. ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos inscriptos y los semiinscriptos que trazaste? ¿Por qué?

GG **39.** Dibujá una circunferencia y trazá uno de sus diámetros; llamá **a** y **b** a sus extremos. También podés hacerlo sin la compu.

a. Pintá un arco **ab** y señalá un ángulo central que lo abarque. ¿Cuánto mide?
b. Trazá un ángulo inscripto que también abarque el arco **ab**. ¿Cuánto mide? Podés desplazar el vértice por la semicircunferencia y ver qué ocurre.
c. ¿Cuánto mide un ángulo semiinscripto que también abarca el arco **ab**? Dibujalo.

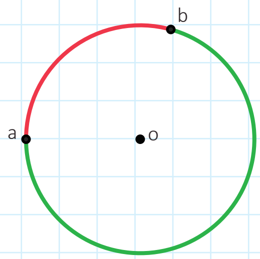
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

40. **Estrategia: empiezo por el final** Mirá lo realizado en la actividad anterior. ¿Cómo usarías esa información para dibujar un triángulo rectángulo **apb**, con el ángulo recto en **p**? Dibujalo.

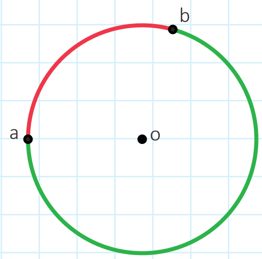


41. En la circunferencia se colorearon los arcos con extremos **a** y **b**.

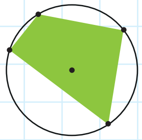
a. Marcá un ángulo inscripto que abarque el arco **ab** rojo y otro que abarque el arco **ab** verde. ¿Qué relación hay entre las medidas de los dos ángulos inscriptos? ¿Cómo te diste cuenta?

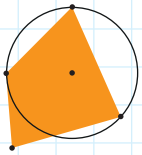


b. Marcá un ángulo semiinscripto que abarque el arco **ab** rojo y otro que abarque el arco **ab** verde, ambos con vértice en **a**. ¿Qué relación hay entre las medidas de los dos ángulos semiinscriptos?



42. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior, recordá las propiedades de los cuadriláteros y explicá por qué algunos cuadriláteros pueden inscribirse en una circunferencia, mientras que otros no.

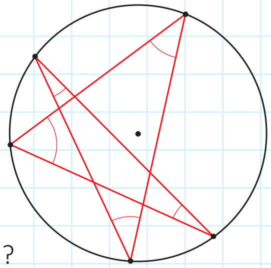




43. En la imagen se observa un pentágono estrellado inscripto en una circunferencia.

a. Trazá los ángulos centrales que abarcan los mismos arcos que los ángulos marcados.

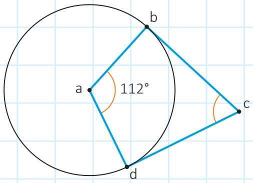
b. ¿Cuánto suman los ángulos marcados? ¿Cómo te diste cuenta?



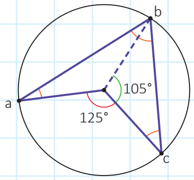
c. ¿Creés que cambiaría la suma si los vértices se desplazasen sobre la circunferencia?

44. Con los datos de la figura, calculá la medida de los ángulos señalados. Explicá cómo lo hiciste.

a. Dos lados son tangentes a la circunferencia.



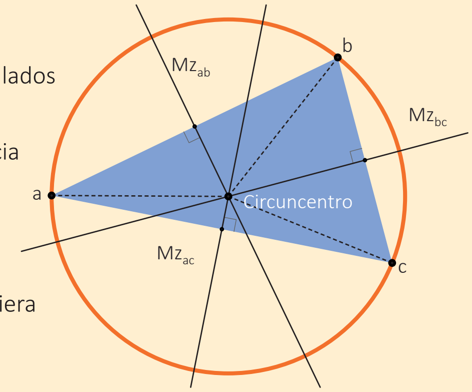
b. Los vértices **a**, **b** y **c** pertenecen a la circunferencia.



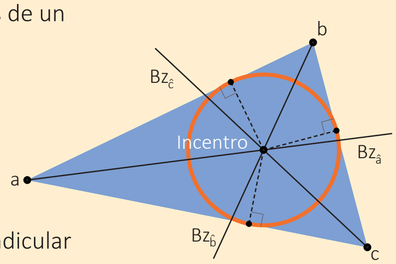
Puntos notables de un triángulo

Algunos puntos importantes

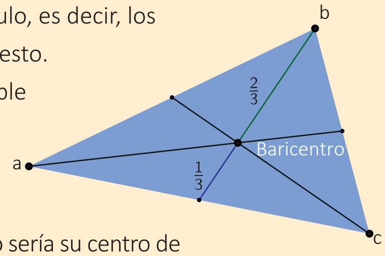
- El **circuncentro** es el punto donde se cortan las **mediatrices** de los lados de un triángulo.
  Como está en las tres mediatrices, se encuentra a la misma distancia de los tres vértices.
  Por eso, es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo, es decir, la que pasa por sus vértices.
  El radio de la circunferencia es la distancia entre el centro y cualquiera de sus vértices.



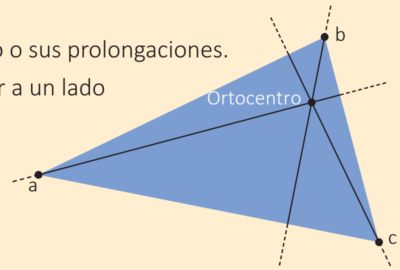
- El **incentro** es el punto donde se cortan las **bisectrices** de los ángulos de un triángulo.
  Como está en las tres bisectrices, se encuentra a la misma distancia de los tres lados.
  Por eso, es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo y sus lados son tangentes a ella.
  Para hallar el radio de la circunferencia, se traza un segmento perpendicular a cualquiera de sus lados con un extremo en el incentro y el otro extremo en ese lado.



- El **baricentro** es el punto donde se cortan las **medianas** de un triángulo, es decir, los segmentos que unen el punto medio de cada lado con el vértice opuesto.
  El baricentro divide cada mediana de manera que una parte es el doble de la otra. Así, una parte mide un tercio de la mediana y la otra, dos tercios.
  Además, si se pudiese construir un triángulo de manera que el material que lo formase estuviese distribuido en forma homogénea, el baricentro sería su centro de masa, es decir, podría mantenerse en equilibrio si se lo apoyase sobre la cabeza de un alfiler justo en ese punto.



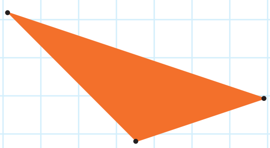
- El **ortocentro** es el punto donde se cortan las **alturas** de un triángulo o sus prolongaciones.
  Cada triángulo tiene tres alturas. Además, cada una es perpendicular a un lado y contiene al vértice opuesto.



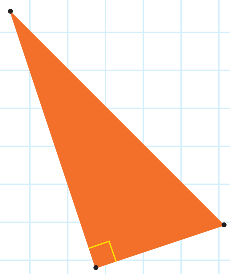
- El circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro son **puntos notables** del triángulo.

45. Encontrá el circuncentro de cada triángulo y trazá la circunferencia que contiene a los vértices.

a. El triángulo es obtusángulo.



b. El triángulo es rectángulo.



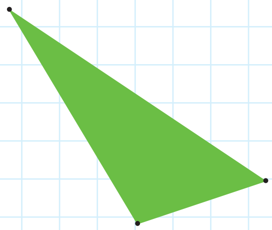
46. Estrategia: analizo y comparo Mirá lo anterior y respondé.

a. ¿Cómo se ubica el circuncentro, considerando la clasificación del triángulo según sus ángulos?

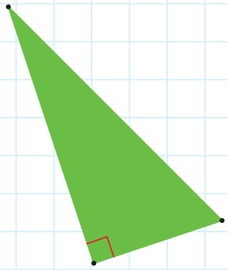
b. ¿Pensás que pasará lo mismo con el incentro? Si no te animás a arriesgar la respuesta, fijate hallando el incentro de los triángulos anteriores.

47. Encontrá el ortocentro de cada triángulo.

a. El triángulo es obtusángulo.



b. El triángulo es rectángulo.



48. Estrategia: analizo y comparo Mirá lo anterior y respondé.

a. ¿Cómo se ubica el ortocentro, considerando la clasificación del triángulo según sus ángulos?

b. ¿Pensás que pasará lo mismo con el baricentro? Si no se te ocurre la respuesta, fijate hallando el baricentro de los triángulos anteriores.

49. Dibujá un triángulo escaleno, uno isósceles y uno equilátero. Encontrá los cuatro puntos notables de cada uno. Podés hacerlo sin la compu.

a. ¿En qué caso los puntos notables coinciden?

b. ¿En qué caso los cuatro puntos notables quedan alineados (sobre una misma recta)?

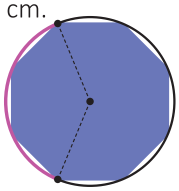
c. Tres puntos notables siempre quedan alineados, sin importar el tipo de triángulo que sea. ¿Cuáles son?

50. Estrategia: empiezo por el final El punto **p** es el baricentro de un triángulo y el punto **a**, uno de sus vértices. Reconstruí un triángulo y explicá cómo lo hiciste. Compará con tus compañeros, ¿todos lo hicieron igual?

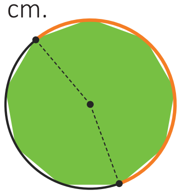


51. Calculá la longitud del arco coloreado, considerando que los polígonos son regulares.

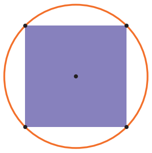
a. El radio mide 5 cm.



b. El radio mide 3 cm.



52. Mariano inscribió un cuadrado en una circunferencia. Al mirar el dibujo que le quedó, escribió un montón de conclusiones, pero... ¿todas son ciertas? ¿Por qué?



a. La recta tangente a la circunferencia que pasa por un vértice es perpendicular a la diagonal del cuadrado.

b. Cada lado del cuadrado forma un ángulo de 45° con la recta tangente que pasa por cada uno de sus extremos.

c. El arco comprendido entre dos vértices consecutivos del cuadrado es una semicircunferencia.

d. Dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por dos vértices del cuadrado son perpendiculares.

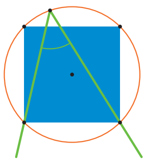
53. **Estrategia: analizo y comparo** Releé las conclusiones a las que llegó Mariano.

a. Inscribí un cuadrado en una circunferencia, como hizo él, y después trazá las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por los vértices del cuadrado.

b. Marcá los puntos donde se cortan esas rectas y remarcá el cuadrilátero que se forma.

c. ¿Qué tipo de cuadrilátero es el que se formó? ¿Cómo te das cuenta?

54. Mariano sigue con el cuadrado inscripto en la circunferencia. Ahora dibujó un ángulo y asegura que es muy fácil calcular su medida.

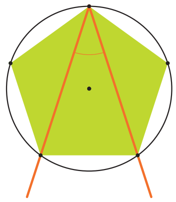


a. ¿Cuánto mide? ¿Cómo lo calculaste?

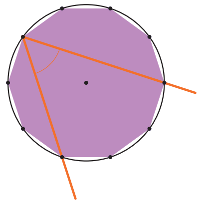
b. ¿Cuánto medirá otro ángulo con vértice en un vértice del cuadrado y que pasa por otros dos consecutivos? ¿Cómo te das cuenta?

55. Calculá el ángulo señalado, considerando que los polígonos son regulares.

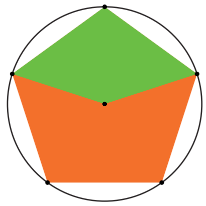
a.



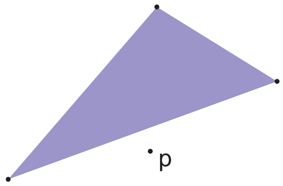
b.



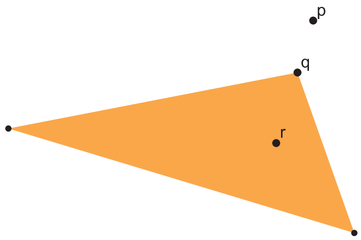
56. ¿Qué cuadrilátero se forma al unir el centro de la circunferencia con tres vértices consecutivos del pentágono regular? ¿Cómo te diste cuenta?



57. ¿Cuál de los puntos notables del triángulo es el punto **p**? Explicá cómo lo sabés.



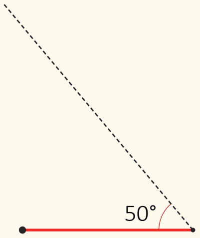
58. **Hacé de profe** Mariela marcó el ortocentro de este triángulo, pero no le puso el nombre y ahora no recuerda cuál es. Señalá el correcto y explicá cómo lo sabés.



59. Carolina quiere ubicar una luz especial para estimular el crecimiento de sus plantas. Desea que esté a la misma distancia del helecho que de cada uno de los bonsáis. Entonces pensó en formar un triángulo con vértices en las tres plantas y ubicar la luz en uno de sus puntos notables. ¿En cuál? ¿Por qué?

60. Dibujá un rombo con un ángulo de 50°. ¿Cuánto miden los otros ángulos?

61. Completá un rombo considerando el lado y el ángulo interior representados.



62. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los rombos que construiste en las dos actividades anteriores.

a. ¿Son congruentes? Si no lo son, señalá en qué se parecen y en qué no.

b. ¿Cuántos rombos diferentes podrías haber dibujado en cada caso?

63. Dibujá un rombo con solo una diagonal de 4 cm.

64. Dibujá un rombo con las dos diagonales de 4 cm.

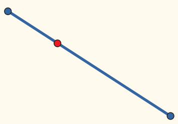
65. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los rombos que construiste en las dos actividades anteriores.

a. ¿Son congruentes? Si no lo son, señalá en qué se parecen y en qué no.

b. ¿Cuántos rombos diferentes podrías haber dibujado en cada caso?

c. ¿Qué rombo particular es el que dibujaste en la actividad 64?

66. Completá el trapecio isósceles considerando que el siguiente segmento es una de sus diagonales y que las dos diagonales se cortan en el punto rojo.



67. **Estrategia: analizo y comparo** Compará el trapecio que construiste en la actividad anterior con el de tus compañeros.

a. ¿Cómo lo hizo cada uno?

b. ¿Qué otro dato podrías agregar para que todos los trapecios construidos sean congruentes?

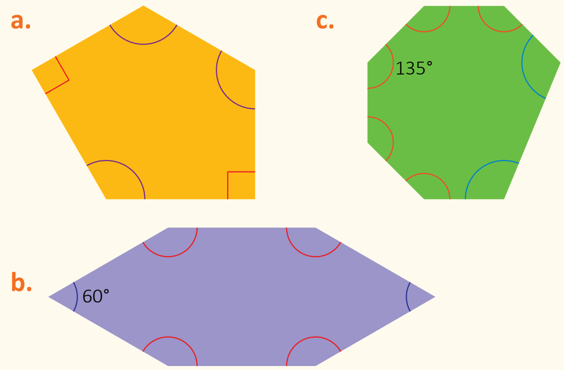
68. Tres compañeros tienen que llevar a la escuela cuadriláteros dibujados en cartulina. Para no hacer todos el mismo, se ponen de acuerdo en cuál hará cada uno. El único inconveniente es que no recuerdan sus nombres. Mirá lo que dicen. ¿A qué cuadrilátero se refiere cada uno?

Dani: –Yo hago el que tiene diagonales distintas, pero lados iguales.

Sol: –Y yo, el que tiene dos pares de lados paralelos, pero diagonales distintas. Además, todos sus lados son iguales.

Mirta: –Entonces yo puedo hacer el de diagonales perpendiculares, ese en el que solo una corta a la otra por la mitad.

69. Calculá la medida de los ángulos coloreados en cada polígono. Considerá que los ángulos de igual color miden lo mismo.



70. ¿Cuáles de estos valores pueden corresponder a los ángulos centrales de polígonos regulares? ¿Cómo te das cuenta?

10°	15°	25°	36°
40°	45°	55°	60°
69°	70°	81°	90°
100°	120°	150°	180°

71. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá en la actividad anterior las medidas que corresponden a ángulos centrales de polígonos regulares.

- **a.** ¿Cuál es la mayor medida que puede tener un ángulo central de un polígono regular? ¿Por qué?
- **b.** ¿Hay algún ángulo central de un polígono regular cuya medida sea, por ejemplo, 22° 30'? Si pensás que sí, señalá cuántos lados tiene, y si creés que no, explicá por qué.
- **c.** ¿Hay alguna medida que sea la menor que puede tener un ángulo central de un polígono regular? ¿Por qué?

72. **Estrategia: empiezo por el final** Analizá algunas características del polígono regular de nueve lados.

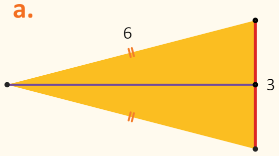
- **a.** ¿Cuánto mide cada ángulo central?
- **b.** Hacé un dibujo de análisis y marcá un ángulo central. Los lados de ese ángulo forman un triángulo con un lado del polígono. ¿Cuánto mide cada ángulo de la base de ese triángulo?
- **c.** Construí un triángulo con esas características.
- **d.** A partir del triángulo anterior, construí el polígono regular de nueve lados.

73. **Estrategia: analizo y comparo** Releé lo que hiciste en la actividad anterior para dibujar el eneágono regular. Luego, escribí las instrucciones que le darías a un compañero para que pueda construir cualquier polígono regular.

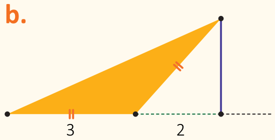
74. ¿Cuánto mide cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles, si el lado desigual mide 5 cm y su altura es de 7 cm?

75. Calculá la altura que se trazó en cada triángulo isósceles representado.

a.

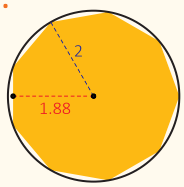


b.

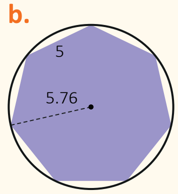


76. Calculá el perímetro y el área de cada uno de los polígonos regulares representados.

a.



b.



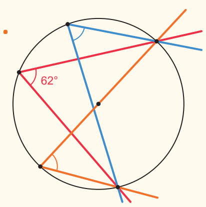
77. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de 25 cm^2 de área?

78. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá cómo resolvieron tus compañeros la actividad anterior.

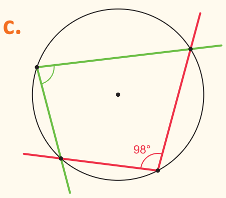
- **a.** Marcelo dice que para calcular la diagonal, tuvo que usar el teorema de Pitágoras. ¿Cómo pudo haberlo hecho?
- **b.** Carla, en cambio, llegó al mismo resultado sin usar ese teorema. Dice que pensó en el cuadrado como un rombo y calculó directamente la medida de la diagonal. ¿Qué fórmula usó?
- **c.** ¿Usaste alguna de esas formas para resolver la actividad anterior? ¿Cuál te parece más fácil?

79. Calculá la medida de los ángulos señalados. Explicá cómo lo hiciste.

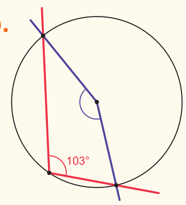
a.



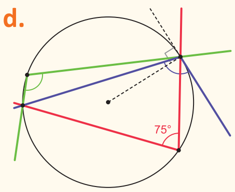
c.



b.



d.



80. Dibujá un segmento de 6 cm.

- **a.** Considerá el segmento como altura de un triángulo y reconstruilo.
- **b.** ¿Cuántos triángulos distintos podrías construir?
- **c.** Si además te dicen que un extremo del segmento es uno de los puntos notables del triángulo, ¿de qué punto notable podría tratarse? ¿Cómo sería el triángulo? Construilo.

AUTOEVALUACIÓN

Marcá la opción correcta.

1. ¿Cuál de estos cuadriláteros no puede tener las diagonales iguales?

- Rectángulo.
- Trapecio rectángulo.
- Trapezoide común.
- Romboide.

2. ¿Cuál de estos cuadriláteros puede tener exactamente tres lados de la misma medida?

- Rombo.
- Trapecio rectángulo.
- Trapecio isósceles.
- Paralelogramo común.

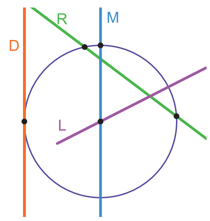
3. ¿Cuál de estos ángulos no es el ángulo interior de ningún polígono regular?

- 128°
- 135°
- 144°
- 150°

4. ¿Cuáles son el área y el perímetro aproximado de un cuadrado que tiene 4 cm de diagonal?

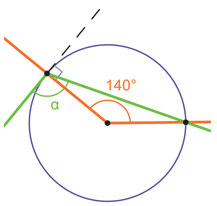
- 16 cm² y 16 cm.
- 11,31 cm² y 8 cm.
- 8 cm² y 4 cm.
- 8 cm² y 11,31 cm.

5. ¿Cuál de las rectas representadas es tangente a la circunferencia?



- D
- R
- M
- L

6. ¿Cuánto mide el ángulo α?



- 70°
- 90°
- 110°
- 280°

7. ¿Cuál es el punto notable que está a la misma distancia de los tres lados del triángulo?

- Circuncentro.
- Incentro.
- Baricentro.
- Ortocentro.

Controlá tus respuestas en las páginas 159 y 160.